

# Lista 5

**Zadanie 1.** Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 2.** Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w  $\mathbb{R}$ ) w zależności od parametru  $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 3.** Niech  $M$  będzie macierzą wymiaru  $n \times n$  postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oblicz rząd macierzy  $M^k$  dla każdego  $k \geq 1$ . Uzasadnij odpowiedź.

*Wskazówka:* Zastanów się, jak wygląda  $M^k E_i$ . A jeszcze lepiej:  $\text{LIN}(M^k E_i)$ .

**Zadanie 4.** Niech  $A, B$  będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli  $AB$  jest odwracalna to  $A$  i  $B$  również są odwracalne.
- Jeśli  $A, B$  są odwracalne, to  $AB$  też jest odwracalne i  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- Jeśli  $A$  jest odwracalna, to  $A^T$  jest odwracalna i zachodzi  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- Jeśli  $A$  jest odwracalna, to  $A^{-1}$  jest odwracalna i zachodzi  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**Zadanie 5** (\* Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że każdą macierz odwracalną  $A$  wymiaru  $n \times n$  można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze  $D_{i\alpha}$  mogą być ostatnie lub pierwsze.

Pokaż też, że każdą macierz  $A$  wymiaru  $n \times n$  można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy przekątniowej (może ona mieć zera na przekątnej).

*Wskazówka:* Skorzystaj z faktu, że używając eliminacji Gaussa można sprowadzić macierz odwracalną do macierzy diagonalnej. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje. Dla macierzy nieodwracalnej skorzystaj z faktu używającego jednocześnie eliminacji na kolumnach i wierszach, potem postępuj podobnie.

**Zadanie 6.** Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 7.** Niech  $M$  będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnortrójkątną/diagonalną. Pokaż, że  $M^{-1}$  również jest dolnotrójkątna/górnortrójkątna/diagonalna.

**Zadanie 8.** Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 9.** Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego  $\mathbb{R}^n$ :

- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ ;
- obrót przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  o kąt  $\alpha$  (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara);
- symetrii  $\mathbb{R}^2$  względem prostej zadanej równaniem  $y = 2x$ .

**Zadanie 10.** Niech  $\mathbb{V}$  będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z  $\mathbb{R}$  i stopnia najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów  $x^0, x^1, x^2, x^3$  oraz  $x^0, x^0 + x^1, x^0 + x^1 + x^2, x^0 + x^1 + x^2 + x^3$ . Udowodnij, że są one bazami. Zapisz macierz przejścia między tymi bazami.

Rozważmy przekształcenie  $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  zadane jako  $F(f) = f' + 2f'' + f'''$ , gdzie  $'$  oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w dwóch podanych powyżej bazach.

**Zadanie 11.** Podaj macierze zmiany bazy pomiędzy każdą z par poniższych baz:

- baza standardowa w  $\mathbb{R}^3$ ;
- $[1, 1, 1]^T, [1, 1, 0]^T, [1, 0, 0]^T$ ;
- $[1, 1, -1]^T, [1, -1, 1]^T, [-1, 1, 1]^T$ .