Lista 8

Zadanie 1. Pokaż, że układ równań uzyskany przez

- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez skalar $\alpha \neq 0$
- usunięcie trywialnego równania $\sum_i 0 \cdot x_i = 0$

jest równoważny wejściowemu.

Wskazówka: Można na palcach, ale prościej jest zinterpretować (wszystko poza ostatnią operacją) jako wierszowe operacje elementarne, które są odwracalne.

Zadanie 2. Pokaż też, że jeśli macierz A' uzyskamy z macierzy A poprzez elementarne operacje wierszowe, to $\ker A = \ker A'$.

Niech A będzie macierzą w postaci schodkowej (wierszowo) i niech każdy element wiodący w wierszu będzie równy 1. Wykonaj operacje wierszowe, tak by te elementy wiodące były jedyne w kolumnie. Jak wygląda baza jądra tak uzyskanej macierzy?

Wskazówka: Odpowiedź „rozwiązać układ równań" nie jest właściwa. Można uzasadnić wprost albo użyć algorytmu obliczania bazy jądra.

Zadanie 3. Dla jakich wartości p podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & + & px_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ px_1 & + & px_2 & + & 2x_3 & = & 2+p \end{array}\right. .$$

Zadanie 4. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & \lambda^2 y & + & \lambda^3 z & = & 1 \\ x & + & \lambda^2 y & + & \lambda^3 z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda^3 z & = & \lambda^2 \end{array}\right. .$$

Zadanie 5. Rozważmy grę, rozgrywającą się na prostokątnej planszy $n \times 1$. Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dotknąć konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i na sąsiednich. Celem gry jest zapalenie wszystkich pól.

Dla jakich wartości n wygrana jest zawsze możliwa?

Podaj prosty algorytm, który rozwiązuje grę, jeśli jest to możliwe (istnieje algorytm zachłanny.)

Zadanie 6. Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Zadanie 7. Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & x_1 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_4 & = & 0 \\ -x_1+ & x_3 & -x_5 & = & 0 \\ -x_2+ & x_4 & -x_6 & = & 0 \\ & -x_3 & +x_5 & = & 0 \\ & -x_4 & +x_6 & = & 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{ccccc} & x_1 & +x_2 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & +x_{n-1} & +x_n & = & 0 \\ & x_{n-1} & +x_n & = & 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Zadanie 8. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M wa wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Zadanie 9 (* Nie liczy się do podstawy)**.** Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B, które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie skorzystaj z reprezentacji macierzy jako iloczynu macierzy elementarnych i macierzy przekątniowej.

Zadanie 10. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$;
- $L'((x, y, z)) = (0, 0, y)$;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$.

Wskazówka: Czasami może być prościej wprost, bez przechodzenia przez macierze.

Zadanie 11. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

Wskazówka: $\det(A) = \det(A^T)$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$.