# Lista 9

**Zadanie 1.** Niech $A, B$ będą komutującymi macierzami kwadratowymi, tj. $AB = BA$. Niech $\lambda$ będzie wartością własną $A$, zaś $\mathbb{V}_\lambda$ będzie przestrzenią wektorów własnych $A$ dla wartości $\lambda$. Pokaż, że $\mathbb{V}_\lambda$ jest przestrzenią niezmienniczą dla $B$, tj. dla $v \in \mathbb{V}_\lambda$ zachodzi $Bv \in \mathbb{V}_\lambda$.

**Zadanie 2.** Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy $M$, to suma (mnogościowa) baz przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

*Wskazówka:* Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory. Zauważ

**Zadanie 3.** Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

**Zadanie 4.** Niech $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi $A$.

**Zadanie 5 (* nie liczy się do podstawy).** Dla wielomianu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ możemy zdefiniować naturalnie wartość tego wielomianu na macierzy kwadratowej, jako $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{k} a_i M^i$, gdzie $M^0 = \mathrm{Id}$.

Niech $M = AJA^{-1}$, gdzie $J$ jest macierzą Jordana (tzn. na przekątnej ma klatki Jordana), zaś $\varphi_M$ jej wielomianem charakterystycznym. Pokaż, że $\varphi_M(M)$ jest macierzą zerową.

(W pełnej ogólności to zadanie powinno mówić, że $A, J$ są macierzami nad $\mathbb{C}$, ale w zasadzie nic nie zmienia to w dowodzie: wystarczy, że pokażesz to dla $\mathbb{R}$.)

Możesz pokazać to wg. następującego schematu.

- Pokaż tezę dla $M$ będącej klatką Jordana.
- Pokaż, że jeśli $p(x) = q(x)r(x)$ to $p(M) = q(M)r(M)$.
- Pokaż, że dla macierzy Jordana $J$ i wielomianu $p(x)$ mamy

$$p\left(\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_k) \end{bmatrix}$$

- Pokaż, że dla macierzy Jordana $J$ mamy $\varphi_J(J) = 0$.
- Pokaż, że dla macierzy $A, M$ oraz wielomiany $p(x)$ mamy $p(A^{-1}MA) = A^{-1}p(M)A$.

**Zadanie 6.** Pokaż, że:

- suma macierzy symetrycznych jest macierzą symetryczną;
- iloczyn macierzy symetrycznych $A, B$ jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$;
- jeśli macierz symetryczna jest odwracalna, to jej macierz odwrotna jest symetryczna.

**Zadanie 7.** Dla wektora $\vec{V}$ niech $\sum \vec{V}$ oznacza sumę jego współrzędnych.

Niech $A$ będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla każdego $\vec{V}$ zachodzi

$$\sum(A\vec{V}) = \sum \vec{V} \ . \tag{*}$$

Pokaż też twierdzenie odwrotne: macierz $A$, która ma wszystkie elementy nieujemne i która dla każdego $\vec{V}$ spełnia (*), jest macierzą stochastyczną.

**Zadanie 8.** Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich), jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Niech $M_1, \ldots, M_k$ będą macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

**Zadanie 9.** Dla wektora $\vec{V} = [v_1, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ niech $\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$.

Niech $A$ będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$

$$\|A\vec{V}\|_1 \leq \|\vec{V}\|_1 \ .$$

Wywnioskuj z tego, że $A$ nie ma wartości własnej o wartości bezwzględnej większej niż 1.

**Zadanie 10.** Rozważmy graf o wierzchołkach $\{1, 2, 3, 4\}$ i krawędziach skierowanych $1 \to 2$, $1 \to 3$, $1 \to 4$, $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 1$, $4 \to 3$. Jak wygląda znormalizowana macierz sąsiedztwa tego grafu? Oblicz ranking dla tej macierzy, tzn. wektor własny dla wartości własnej o sumie współrzędnych 1.

Oblicz PageRank tego grafu dla $m = 0{,}25$.

**Zadanie 11.** To zadanie pokazuje, że iteracyjna metoda obliczania PageRanku zbiega wykładniczo szybko.

Niech $A$ będzie macierz stochastyczną (niekoniecznie dodatnią!) rozmiaru $n \times n$ a $P$ macierzą stochastyczną $n \times n$ postaci

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \ .$$

Dla liczby rzeczywistej $0 \leq m \leq 1$ niech $M_m$ oznacza macierz

$$M_m = (1 - m)A + mP \ .$$

Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|M_m\vec{V}\|_1 \leq (1 - m)\|\vec{V}\|_1 \ .$$

Możesz skorzystać (bez dowodu, choć jest on prosty) z faktu, że dla dowolnych wektorów $\vec{W}, \vec{U}$ zachodzi

$$\|\vec{U} + \vec{W}\|_1 \leq \|\vec{U}\|_1 + \|\vec{W}\|_1 \ .$$

*Wskazówka:* Pokaż najpierw dla $m = 0$ oraz $m = 1$, dla $m = 0$ skorzystaj z Zadania 9.