Lista 10

Zadanie 1. Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że A nie ma wartości własnej -1.

Wskazówka: Rozpatrz A^2, rozumowanie podobne jak w przypadku grafów silnie spójnych. Jaka jest krotność geometryczna wartości własnej 1? Możesz korzystać z Twierdzeń udowodnionych na wykładzie.

Zadanie 2. Pokaż, że dla dowolnej macierzy kwadratowej M (odpowiedniego rozmiaru) zachodzi

$$\vec{U} \cdot (M\vec{V}) = (M^T\vec{U}) \cdot \vec{V} \ ,$$

gdzie $\cdot$ oznacza standardowy iloczyn skalarny.

Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$). Pokaż, że

$$\vec{U} \cdot (M\vec{V}) = (M\vec{U}) \cdot \vec{V} \qquad (**)$$

(zakładamy, że wymiary się zgadzają). Pokaż też własność odwrotną: jeśli M spełnia własność (**) dla każdych $\vec{U}, \vec{V}$, to M jest symetryczna.

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych $\vec{V}$ oraz $\vec{U}$, to $\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$, tj. $\vec{V}$ i $\vec{U}$ są prostopadłe.

Wskazówka: Dla „własności odwrotnej": jak wyglądają obie strony równości gdy rozpatrzymy je dla wektorów jednostkowych.

Zadanie 3. Udowodnij nierówność

$$|\vec{U} \cdot \vec{V}| \leq \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|$$

dla $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$.

Wskazówka: Rozważ najpierw $\vec{U} \perp \vec{V}$, potem liniowo zależne a potem dowolne.

Zadanie 4. Udowodnij, że w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dla dowolnej pary wektorów $\vec{U}, \vec{V}$ zachodzi

$$\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| \quad \iff \quad (\vec{U} - \vec{V}) \perp (\vec{U} + \vec{V}) \ .$$

Zinterpretuj ten fakt jako stwierdzenie: „przekątne równoległoboku są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy równoległobok ten jest rombem".

Wskazówka: Wyraź $\vec{U}, \vec{V}$ przez $\vec{U} - \vec{V}, \vec{U} + \vec{V}$.

Zadanie 5. Dla podanych poniżej układów wektorów podaj bazy dopełnień ortogonalnych przestrzeni liniowych przez nie generowanych:

- $[1, 0, 1]^T, [2, 3, 1]^T$ nad $\mathbb{R}$;
- $[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1]$ nad $\mathbb{Z}_2$;
- $[1, 0, 2]$ nad $\mathbb{Z}_3$.

Uwaga: w przestrzeniach $\mathbb{Z}_p^n$ dopełnienie ortogonalne $\mathbb{W}^\perp$ może nie być rozłączne z $\mathbb{W}$, może nawet zachodzić równość $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{F}^n$, rozpatrzmy standardowy iloczyn skalarny (na $\mathbb{F}^n$). Pokaż, że:

- $\mathbb{V}_1 \leq \mathbb{V}_2 \iff \mathbb{V}_1^\perp \geq \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp \cap \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp + \mathbb{V}_2^\perp$.

Zadanie 7 (* nie liczy się do podstawy, choć nietrudne). Pokaż, że dla każdego kodu liniowego istnieje kod mu równoważmy, który ma kodowanie systematyczne.

Wskazówka: Eliminacja Gaußa na kolumnach.

Zadanie 8. Rozpatrzmy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia najwyżej 3. Zdefiniujmy iloczyn skalarny jako

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^i, x^j \rangle$ dla $0 \leq i \leq j \leq 3$.

Zadanie 9. Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie-wymiarową przestrzenią Euklidesową. Udowodnij, że dla zbioru wektorów $U \subseteq V$ zachodzi

$$U^{\perp} = (\mathrm{LIN}(U))^{\perp} \quad \text{oraz} \quad (U^{\perp})^{\perp} = \mathrm{LIN}(U) \ ,$$

gdzie $^{\perp}$ oznacza dopełnienie ortgonalne względem iloczynu skalarnego w $\mathbb{V}$.

Zadanie 10 (Macierz Grama)**.** Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ w przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{V}$ wymiaru k jako

$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} \ .$$

Niech $B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$. Zdefiniujmy macierz $A = [(\vec{v}_1)_B \,|\, (\vec{v}_2)_B \,|\, \dots \,|\, (\vec{v}_k)_B]$, tj. macierz, której j-ta kolumna to wektor z $\mathbb{R}^n$ będący wyrażeniem $\vec{v}_j$ w bazie B. Pokaż, że

$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = A^T A \ .$$

Korzystając z tej reprezentacji udowodnij, że

- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ jest liniowo zależny.

Komentarz: Założenie, że wymiar przestrzeni i liczba wektorów w układzie są takie sama nie jest potrzebne, ale ułatwia rachunki.

Zadanie 11 (Nierówność Bessela; równość Parsevala)**.** Niech $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ będą układem ortonormalnym (nie zakładamy, że jest bazą). Pokaż, że dla dowolnego wektora $\vec{v}$:

$$\sum_{i=1}^{k} |\,\langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle\,|^2 \leq ||\vec{v}||^2 \ .$$

Co więcej, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\vec{v}$ zachodzi równość.