Lista 13

Zadanie 1. Rozważmy grupę G i zdefiniujmy w niej *sprzężenie* (względem elementy g) $\varphi_g : G \to G$:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1} \quad .$$

Pokaż, że

- $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$;
- φ_a jest izomorfizmem z G w G;
- jeśli $H \leq G$ to $\varphi_a(H) \leq G$ (podgrupa sprzężona).

Zadanie 2. Pokaż, że dla $x_1, \ldots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \ldots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \cdots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \cdots (x_1)^{-z_1} \quad .$$

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie izomorfizmy pomiędzy grupą obrotów kwadratu, a grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Wskazówka: Pokaż, że izomorfizm zachowuje rząd elementu.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.

Zadanie 5. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzyelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?

Zadanie 6. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G.

- Pokaż, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G.
- Pokaż, że jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G, to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$.
- Pokaż, że jeśli G jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1 h_2 \ : \ h_1 \in H_1, \ h_2 \in H_2\}$.
  (Dla przypomnienia: $\langle A \rangle$ to najmniejsza grupa generowana przez A.)

Zadanie 7 (* Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Wskazówka: Rozważ najmniejszą potęgę generatora, która należy do podgrupy. Pokaż, że jest to generator.

Zadanie 8. Pokaż, że zbiór symetrii trójkąta równobocznego jest izomorficzny z grupą wszystkich permutacji zbioru trzyelementowego S_3.

Zadanie 9. Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1); (1, 2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n-1$;
- $\langle (1, 2); (2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$.

Zadanie 10. Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} \quad .$$

podaj permutację odwrotną σ^{-1}; rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Podaj rząd σ oraz σ^{-1}.

Zadanie 11.

- Wyznacz permutacje odwrotne do permutacji $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Przedstaw permutację $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ jako złożenie cykli rozłącznych.
- Przedstaw permutacje $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ jako złożenia transpozycji.
- Jakie są rzędy permutacji z powyższych podpunktów?