Lista 14

Zadanie 1. Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} .$$

Określ ich parzystość.

Zadanie 2. Czy zbiór $\{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ z działaniem składania permutacji jest podgrupą grupy S_4? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzyelementowe to czy otrzymamy podgrupą S_4?

Zadanie 3 (* nie liczy się do podstawy). Dla macierzy $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ rozpatrzmy funkcje:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \ ,$$

$$f'((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \ .$$

Pokaż, że obie definiują wyznacznik.

Wskazówka: Możesz np. sprawdzić, że spełnia aksjomaty wyznacznika. Tylko zamiana kolumn jest nietrywialna: rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

Zadanie 4. Niech grupa G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ i $c \in \mathcal{C}$. Pokaż, że stabilizator G_c tego elementu jest podgrupą G.

Zadanie 5. Znajdź grupę obrotów sześcianu (czyli podaj jej elementy). Każdy obrót jest „naturalny", tj. da się do zinterpretować jako obrót wokół pewnej osi. Podaj analogiczny opis dla grupy obrotów i symetrii.

Zadanie 6. Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremnego, sześcianu foremnego, ośmiościanu foremnego, dwunastościanu foremnego, dwudziestościanu foremnego. Wyznacza też rzędy grup obrotów i symetrii.

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 7 (Grupa dihedralna). Rozpatrzmy grupę obrotów i odbić n-kąta foremnego (nazywamy ją *grupą dihedralną* D_n). Ile ma ona elementów? Pokaż, że nie ma innych przekształceń zachowujących ten wielokąt (tj. przekształceń z wierzchołków w wierzchołki, które zachowują sąsiedztwo wierzchołków).

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 8. Rozpatrzmy grę w kółko i krzyżyk na planszy 5×5; w szczególności każde pole może być wypełnione kółkiem, krzyżykiem lub być puste. Dwie plansze są identyczne, jeśli jedną można przeprowadzić na drugą przez obrót lub symetrię, po której dodatkowo możemy wymienić kółka na krzyżyki i odwrotnie.

Znajdź ilość rozróżnialnych plansz.

Zadanie 9. W grupie S_{10} rozpatrzmy grupy generowane przez

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
3. $(1,6,9)(2,10)(3,4,5,7,8)$.

Dla każdego elementu ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ wyznacz jego orbitę oraz stabilizator dla naturalnego działania działania tych podgrup na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Zadanie 10. Ile jest nierozróżnialnych naszyjników mających 6 równo oddalonych korali tej samej wielkości, przy czym korale mogą być białe, czerwone lub zielone, a naszyjnik można obracać oraz „przełożyć na drugą stronę”.

Zadanie 11. Opisz warstwy lewostronne i prawostronne podgrupy S_3 w S_4. Czy potrafisz uogólnić tę obserwację na dowolne $S_{n-1} \leq S_n$?

Wskazówka: Można na palcach, ale zastanów się, co się dzieje z obrazem/przeciwobrazem 4?