Algebra 2022/23 — Egzamin część I

Czas: 150 minut.

Wszystkie Zadania D należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Wszystkie Zadania W należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Każde Zadanie T należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punktacja: po 10 punktów.

Osoby zaliczające **różnice programowe**: od algebra liniowa 1R (IM): całość egzaminu;
w pozostałych przypadkach: zadania D5, D6, W4, W5, W6, T4, T5; czas: 70 minut

Zadanie D1. Co to znaczy, że układ wektorów z pewnej przestrzeni liniowej jest liniowo niezależny? Co to znaczy, że jest bazą tej przestrzeni? Co to jest wymiar przestrzeni liniowej?

Zadanie D2. Co to jest przekształcenie liniowe, jak jest zdefiniowane jego jądro, a jak obraz?

Zadanie D3. Co to jest wartość własna macierzy M, jej krotność geometryczna i algebraiczna?

Zadanie D4. Podaje definicje standardowego i ogólnego iloczynu skalarnego.

Zadanie D5. Niech grupa G działa na zbiorze X. Podaj definicje: orbity, stabilizatora. Sformułuj Lemat Burnside'a.

Zadanie D6. Podaje definicję największego wspólnego dzielnika wielomianów.

Zadanie W1. Podaj wzory Cramera. Do czego służą i kiedy można je stosować?

Zadanie W2. Jakie znasz zależności pomiędzy krotnościami: geometryczną i algebraiczną wartości własnej? Co wiesz o sumie krotności po wszystkich wartościach własnych?

Zadanie W3. Co wiesz o wartościach własnych macierzy dodatnio określonych? Macierz dodatnio określoną M można przedstawić jako iloczyn $M = AB$ dla macierzy A, B o dodatkowych własnościach, powiedz jakich?

Zadanie W4. Co to jest rozkład permutacji na cykle rozłączne? Jaki jeszcze rozkład na permutacje z prostej podklasy znasz? Czy te rozkłady są jednoznaczne?

Zadanie W5. Podaj chińskie twierdzenie o resztach.

Zadanie W6. Ile elementów może mieć ciało skończone? Co wiesz o ciałach o tej samej skończonej liczbie elementów?

Zadanie T1. Podaj bazę obrazu i bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez poniższą macierz

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

Odpowiednie przestrzenie liniowe są nad $\mathbb{R}$.

Zadanie T2. Dla poniższej macierzy wyznacz wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne. Dla wybranej wartości własnej wyznacz (dowolny) wektor własny.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie T3. Dokonaj ortonormalizacji poniższego układu wektorów (dla standardowego iloczynu skalarnego).

$$(1,1,1,1)^T; (4,2,2,4)^T; (4,-2,-6,0)^T$$

Zadanie T4. Rozłóż poniższą permutację σ na cykle rozłączne, wyznacz jej rząd, parzystość i permutację odwrotną.

Wyznacz orbitę i stabilizator liczby 7 dla naturalnego działania podgrupy generowanej przez σ na zbiorze liczb $\{1, \ldots, 18\}$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 11 & 9 & 10 & 17 & 7 & 16 & 4 & 15 & 6 & 12 & 14 & 18 & 8 & 13 \end{pmatrix} .$$

Zadanie T5. Oblicz największy wspólny dzielnik następujących wielomianów (o współczynnikach z $\mathbb{R}$) i przedstaw go w postaci $af + bg$ dla odpowiednich wielomianów a, b.

$$f = x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 1$$
$$g = x^3 + x^2 - x + 2 \ .$$

Algebra 2022/23 — Egzamin część II

Czas: 150 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń. Po 10 punktów za zadanie.

Zadanie 1.
Niech A będzie macierzą kwadratową rozmiaru $n \times n$ i rzędu $\operatorname{rk}(A) = n - k$. Pokaż, że

$$n - 2k \leq \operatorname{rk}(A^2) \leq n - k.$$

Wskazówka: Niech f_A to odpowiadające przekształcenie liniowe. Rozważ f'_A: f_A obcięte do $\operatorname{Im} f_A$.

Zadanie 2.
Niech $\mathcal{P}$ będzie będzie zbiorem macierzy kwadratowych rozmiaru $n \times n$ takich, że w każdej kolumnie i w każdym wierszu jest dokładnie jeden niezerowy element. Pokaż, że

$$A, B \in \mathcal{P} \implies AB, A^T, A^{-1} \in \mathcal{P}$$

(w szczególności: $A \in \mathcal{P}$ implikuje, że A jest odwracalna.)

Zadanie 3.
Niech λ będzie wartością własną odwracalnej macierzy M. Pokaż, że λ^{-1} jest wartością własną M^{-1} i że ich krotności geometryczne są takie same.

Zadanie 4.
Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią nad $\mathbb{R}$ z ogólnym (niekoniecznie standardowym) iloczynem skalarnym. Pokaż, że jeśli układ wektorów jest ortogonalny, to jest niezależny.

Zadanie 5.
Niech $c = (1, 2, 3, \ldots, k)$ będzie cyklem, zaś $\sigma \in S_n$ dowolną permutacją, przy czym $n \geq k$. Rozłóż permutację $\tau = \sigma c \sigma^{-1}$ na cykle rozłączne.
Wskazówka: Rozważ $\tau(\sigma(1))$.

Zadanie 6.
Niech G będzie grupą o mocy p^k dla p pierwszego. Niech G działa na zbiorze X. Pokaż, że każda orbita ma moc będącą potęgą p.

Wywnioskuj z tego, że jeśli $p \nmid |X|$, to istnieje $x \in X$ takie że $G_x = G$, gdzie G_x to stabilizator x.

Zadanie 7.
Niech $a, b, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pokaż, że jeśli $k|a, k|b$ i istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie że

$$k = xa + yb$$

to $k = \operatorname{nwd}(a, b)$.