Algebra 2022/23 — Egzamin poprawkowy, część I

Czas: 150 minut.

Wszystkie Zadania D należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Wszystkie Zadania W należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Każde Zadanie T należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punktacja: po 10 punktów.

Zadanie D1. Co to znaczy, że $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ (nad ciałem $\mathbb{F}$)? Jak jest zdefiniowana podprzestrzeń $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ dla $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$?

Zadanie D2. Jak jest zdefiniowany rząd wierszowy macierzy, a jak rząd kolumnowy? Co to jest rząd przekształcenia liniowego?

Zadanie D3. Jak jest zdefiniowany wielomian charakterystyczny macierzy, a jak wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego?

Zadanie D4. Co to znaczy, że układ wektorów jest ortogonalny, a co, że ortonormalny? Co to znaczy, że macierz jest ortogonalna?

Zadanie D5. Jak jest zdefiniowana grupa permutacji S_n, jak jest zdefiniowane działanie w grupie S_n? Co to znaczy, że permutacja σ z S_n jest cyklem? Co, że $\sigma \in S_n$ jest transpozycją a co, że transpozycją elementów sąsiednich?

Zadanie D6. Co to jest ciało proste, co to jest charakterystyka ciała? Co to znaczy, że ciało jest algebraicznie domknięte?

Zadanie W1. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi $n \times n$. Wyraź $\det(AB)$ i $\det(2A)$ przez $\det A, \det B$ (i być może inne liczby). Co można powiedzieć o $\det(A)$, jeśli A jest odwracalna, ile wynosi wtedy $\det(A^{-1})$?

Zadanie W2. Niech A będzie macierzą $n \times m$ zaś $\vec{X}, \vec{B}$ wektorami rozmiarów $m \times 1$ i $n \times 1$. Rozważmy układ równań liniowych $A\vec{X} = \vec{B}$. Jakie warunki powinny spełniać A i $\vec{B}$, aby ten układ miał (być może więcej niż jedno) rozwiązanie? (Podaj odpowiednie twierdzenie.) Co wiadomo o zbiorze wszystkich rozwiązań, jeśli istnieje rozwiązanie $\vec{X}_0$? Co wiadomo o istnieniu i liczbie rozwiązań, jeśli A jest kwadratowa i odwracalna?

Zadanie W3. Niech M będzie macierzą kwadratową rozmiaru $n \times n$ a $\mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_k$ jej (wszystkimi) podprzestrzeniami wektorów własnych dla parami różnych wartości własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Jaka jest zależność pomiędzy $\sum_{i=1}^{k} \dim \mathbb{W}_i$, $\dim(\mathbb{W}_1 + \cdots + \mathbb{W}_k)$ i n? Co więcej powiedzieć można, jeśli M jest symetryczną macierzą liczb rzeczywistych?

Zadanie W4. Niech A, B będą ortogonalnymi macierzami (liczb rzeczywistych) tego samego rozmiaru. Ile może wynosić $\det(A)$? Które z podanych macierzy są ortogonalne $-A, A + B, A \cdot B, 2A, A^{-1}, A^3, A \cdot B^{-1}$? Nie musisz uzasadniać odpowiedzi.

Zadanie W5. Niech H będzie podgrupą G. Co wiesz o warstwach podgrupy H? Jaki znasz związek między $|H|$ a $|G|$ oraz między rzędem $g \in G$ a $|G|$?

Zadanie W6. Jak można scharakteryzować elementy odwracalne w $\mathbb{Z}_m$ dla $m \in \mathbb{N}$? Ile elementów ma $\mathbb{F}^*$ o n elementach? (Dla przypomnienia: w pierścieniu R przez R^* oznaczamy zbiór elementów odwracalnych w R).

Zadanie T1. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań (nad $\mathbb{Z}_7$) w zależności od wartości parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$?

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 3y + 5z = \lambda \\ 2x + 6y + 3z = 2 \\ 6x + 4y + (\lambda+1)z = -\lambda \end{cases}$$

Zadanie T2. Podaj macierz odwrotną do poniższej macierzy liczb rzeczywistych:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie T3. Rozpatrzmy przestrzeń $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym i jej podprzestrzeń:

$$\mathbb{W} = \mathrm{LIN}((0,0,3,4)^T, (0,0,-1,7)^T) \ .$$

Podaj dowolną bazę ortonormalną $\mathbb{W}$. Oblicz rzuty prostopadłe na $\mathbb{W}$ następujących wektorów:

$$(0,1,-4,3)^T, (1,0,3,4)^T.$$

Zadanie T4. Podaj dowolne rozwiązanie w liczbach całkowitych układu kongruencji

$$\begin{cases} x \mod 3299 = 312 \\ x \mod 647 = 83 \end{cases} .$$

Nie musisz podawać liczby dokładnie, wystarczy, że podasz ją jako łatwe do policzenia na kalkulatorze wyrażenie arytmetyczne używające jedynie operacji $+$, $-$, $\cdot$ i liczb całkowitych.

Zadanie T5. Dane są dwie permutacje z grupy S_{10}

$$\sigma = (1,7,5,4)(2,3)(6,8,9)(10)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 7 & 3 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix} .$$

Oblicz permutację ρ zadaną jako

$$\rho = \sigma^{146}\tau^{-249} .$$

Rozłóż ρ na cykle rozłączne, podaj rząd i parzystość ρ, oblicz ρ^{-1} i dla niej również podaj rozkład na cykle rozłączne, parzystość i rząd.

Podaj orbitę i stabilizator liczby 1 w naturalnym działaniu grupy generowanej przez ρ na zbiorze liczb $\{1, \ldots, 10\}$.