

Kody korekcyjne: Lista 4

17 listopada 2023

Zadanie 1. Załóżmy, że w przestrzeni \mathbb{R}^n jest M różnych wektorów v_1, \dots, v_M , z których każdy ma długość 1 oraz zachodzi

$$\langle v, v' \rangle \leq 0$$

dla $v \neq v'$ z tego zbioru, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w \mathbb{R}^n . Pokaż, że $M \leq 2n$. Udowodnij też, że to ograniczenie jest ściśle.

Wskazówka: Obróć przestrzeń tak, aby wektory były ortogonalne. Nie zmienia to iloczynu skalarnego, czyli

Zadanie 2. Podaj algorytm w modelu adaptacyjnym, który znajduje jedną chorą osobę używając $\mathcal{O}(\log N)$ testów. Uogólnij wynik tak, aby znajdować d osób przy użyciu $\mathcal{O}(d \log N)$ testów.

Popraw algorytm tak, aby używał $\mathcal{O}\left(d \log_2 \frac{N}{d}\right)$ testów.

Wskazówka: Pierwszy sposób: podziel N na mniejsze grupy i sprawdź osobno, oszacuj czas. Drugi: uszereguj wszystkie osoby, pokaz jak znaleźć chorego o najmniejszym numerze N' w czasie $\mathcal{O}(\log N')$. Iteruj, oszacuj sumaryczny czas: $\sum_{i=1}^p \log \frac{N}{p^i} \leq \log N$. (niezależnie od sensu albo przez pochodne).

Zadanie 3. Pokaż, że macierz d -rozłączna jest d -separowalna.

Zadanie 4. Podaj algorytm dla problemu group testing używający macierzy d -rozłącznej rozmiaru $t \times N$ i odtwarzający zbiór chorych w czasie $\mathcal{O}(tN)$ (czasu mnożenia macierzy i wektora chorych nie liczymy).

Wskazówka: Intuicja definicji: jeśli S to zbiór chorych, to test i jak z definicji daje wynik 0, czyli jest świadkiem tego, że i jest zdrowy. Algorytm: $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ można rozpatrzeć oddzielnie status chorego/zdrowy rozpatrywać tylko na podstawie testów, w których brał udział.

Zadanie 5. Pokaż, że każda macierz d -separowalna jest też $(d - 1)$ -rozłączna.

Zadanie 6. Pokaż, że zamiana współrzędnych może przekształcić kod cykliczny w niecykliczny.

Pokaż, że usunięcie współrzędnej może zamienić kod cykliczny w niecykliczny.

Zadanie 7. Pokaż, że kod $RS_{\mathbb{F}_{n+1}}(\gamma^0, \dots, \gamma^{n-1}, n, k)$, czyli wielomiany stopnia $< k$ ewaluowane we wszystkich punktach poza 0, w kolejności kolejnych potęg generatora, jest kodem cyklicznym.

Zadanie 8. Pokaż bezpośrednio z definicji, że kod dualny do kodu cyklicznego jest cykliczny.