Kody korekcyjne: Lista 10

20 grudnia 2023

Zadanie 1. Pokaż, że dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^m}$ i $P, P_1, P_2 \in \mathbb{F}_{q^m}[Z]$ zachodzą następujące własności:

1. $\deg_q(\alpha P_1 + \beta P_2) \leq \max\{\deg_q(P_1), \deg_q(P_2)\}$.
2. $\deg_q(P_1 \cdot P_2) \leq \deg_q(P_1) + \deg_q(P_2)$.

Zadanie 2. Pokaż, że jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}_{q^m}$ są liniowo zależne (nad $\mathbb{F}_q$), to funkcja

$$\Phi : \mathbb{F}_{q^m} \to \mathbb{F}_q^m, \quad \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m), \quad \Phi_i(\alpha) = \mathrm{tr}(\lambda_i \alpha)$$

nie jest bijekcją.

Zadanie 3. Pokaż, że dla $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}_{q^m}$ funkcja

$$f_\lambda : \mathbb{F}_{q^m} \to \mathbb{F}_q \quad f_\lambda(X) = \mathrm{tr}(\lambda X)$$

jest funkcją q^{m-1} na 1, tzn. przeciwobraz każdej wartości w $\mathbb{F}_q$ ma moc q^{m-1}.

Zadanie 4. Niech $T \subseteq \mathbb{F}_q$ będzie zbiorem mocy t. Zdefiniujmy wielomian

$$p(X_1, \ldots, X_m) = \left(\prod_{i=1}^{s} (X_i^{q-1} - 1) \right) \cdot \prod_{a \in T} (X_{s+1} - a)$$

- Ile wynosi $\deg(p)$?
- Udowodnij, że dla każdej bijekcji $\mathbb{F}_q$-liniowej Φ zachodzi $\deg(p \circ \Phi) \geq q^m - (q-t)q^{m-s-1}$.

  Wskazówka: Ile pierwiastków ma p? Co to mówi o stopniu $p \circ \Phi$?
- Wywnioskuj z tego, że $R_{q,m}(r) \geq q^m - (q-t)q^{m-s-1}$, gdzie $r = s(q-1) + t$ dla $0 \leq t < q - 1$ (Na wykładzie pokazaliśmy jedynie ograniczenie w drugą stronę).