

Lista 2

Zadanie 1. Niech $U, W, W' \leq V$. Udowodnij zawieranie:

$$(U \cap W) + (U \cap W') \leq U \cap (W + W')$$

Pokaż, że jeśli $W \leq U$ to zachodzi równość obu stron powyższego zawierania.

Zadanie 2. Niech V będzie przestrzenią liniową.

Pokaż, że układ wektorów $U \subseteq V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\vec{u} \in U$ taki że

$$\text{LIN}(U) = \text{LIN}(U \setminus \{\vec{u}\}).$$

Pokaż też, że jeśli $\vec{0} \notin U$, to są przynajmniej dwa takie wektory.

(Uwaga: traktujemy U jako multizbiór, tzn. jeśli zawiera dwa razy ten sam wektor, to wyborem \vec{u} mogą być dwie różne „kopie” tego samego wektora.)

Zadanie 3. Rozważamy przestrzeń nad \mathbb{R} . Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ układy wektorów

- $\{\alpha\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2\}$
- $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_4, \dots, \vec{v}_{n-1} + \vec{v}_n, \vec{v}_n + \alpha\vec{v}_1\}$

są liniowo niezależne?

Zadanie 4. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad \mathbb{R})? Rozszerz ich (dowolny) maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1. $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)$;
2. $(0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 1)$;
3. $(1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$;
4. $(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim \mathbb{R}^n), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) \mathbb{R}^n :

- $(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1)$;
- $(2, 3, -4, -1), (1, -2, 1, 3)$;
- $(2, 3, 5, -4, 1), (1, -1, 2, 3, 5)$.

Zadanie 6. Rozpatrzmy ponownie przestrzeń liniową z Zadania 11 z Listy 1, tj. na zbiorze podzbiorów 2^M skończonego zbioru M określamy operacje:

$$U + U' := U \Delta U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną.

Podaj (naturalną) bazę tej przestrzeni liniowej. Czy potrafisz naturalnie zinterpretować izomorfizm zadany przez wyrażanie w tej bazie?

Zadanie 7. Niech $\varphi : V \rightarrow V'$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych. Pokaż, że $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_k) \in V'$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą.

Zadanie 8. Niech V będzie przestrzenią liniową, skończenie wymiarową a $A \subseteq V$: układem liniowo niezależnym, $|A| = |B|$, gdzie B jest pewną bazą V .

Pokaż, że A też jest bazą.

Wskazówka: Spróbuj rozszerzyć A o kolejne wektory z B ustalonej bazy. Co możesz powiedzieć o końcowym zbiorze?

Zadanie 9. Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową. Pokaż, że:

- Każdy niezależny układ wektorów $A \subseteq V$ można rozszerzyć do bazy V .

Wskazówka: Indukcja w dół po mocy A .

- Z każdego układu wektorów $A \subseteq \mathbb{V}$ można wybrać bazę przestrzeni $\text{LIN}(A)$.

Zalecane jest skorzystanie z Lematu Steinitza.

Zadanie 10. Wyraź w bazie $B = \{(1, 2, 3); (0, 1, 2); (0, 0, 1)\}$ wektory

- $(1, 0, 0)$
- $(0, 1, 0)$
- $(0, 0, 1)$
- $(7, 3, 2)$

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy.). *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:

Jeśli $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej \mathbb{V} , to zbiór liczący $k + 1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wynioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończonej wymiarowej są równoliczne.