Lista 3

Zadanie 1. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi. Pokaż, że $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ lub $\dim(\mathbb{V}) > \dim(\mathbb{W})$.

Zadanie 2. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{W}, \mathbb{W}', \mathbb{W}'' \leq \mathbb{V}$.

Udowodnij, że

$$\dim((\mathbb{W} + \mathbb{W}') \cap \mathbb{W}'') + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') = \dim((\mathbb{W}' + \mathbb{W}'') \cap \mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}' \cap \mathbb{W}'') =$$

Zadanie 4. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

1. $S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
2. $S = \{(2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}$, $T = \{(3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0)\}$.

Zadanie 5. Dane są dwa układy wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ (nad ciałem $\mathbb{R}$):
$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ i $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ile wynoszą wymiary $\mathrm{LIN}(S \cup T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$? Podaj dowolną bazę $\mathrm{LIN}(S \cup T)$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zachodzi $U = \vec{u} + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zbiór $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 7. Dla podanych warstw U przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz wektorów $\vec{V}$ określ, czy $\vec{V} \in U$. Odpowiedzi uzasadnij.

(a) $U = [1, 3, 2] + \mathrm{LIN}([2, 1, 5], [2, 0, 1])$, $\vec{V} = [3, 6, 15]$
(b) $U = [1, 3, 2] + \mathrm{LIN}([2, 1, 5], [2, 0, 1])$, $\vec{V} = [4, 6, 16]$
(c) $U = [1, 0, 1] + \mathrm{LIN}([1, 1, 1], [3, -1, 2])$, $\vec{V} = [-4, 7, 17]$
(d) $U = [1, 0, 1] + \mathrm{LIN}([1, 1, 1], [3, -1, 2])$, $\vec{V} = [-8, 14, 34]$

Zadanie 8. Pokaż, że jeśli U, U' są warstwami tej samej przestrzeni liniowej $\mathbb{W}$, to $U \cap U' = \emptyset$ lub $U = U'$.

Zadanie 9. Pokaż, że na zbiorze warstw (podprzestrzeni $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$) można zadać strukturę przestrzeni liniowej poprzez:

$$(\vec{u} + \mathbb{W}) + (\vec{u}' + \mathbb{W}) = (\vec{u} + \vec{u}') + \mathbb{W}$$
$$\alpha(\vec{u} + \mathbb{W}) = (\alpha\vec{u}) + \mathbb{W}$$

Ile wynosi wymiar tak zdefiniowanej przestrzeni (w zależności od $\dim \mathbb{V}$ i $\dim \mathbb{W}$)?

Wskazówka: W drugim punkcie: rozważ bazę $\mathbb{W}$ i rozszerz ją do bazy $\mathbb{V}$.

Zadanie 10. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Pokaż, że $\vec{u}, \vec{v}$ należą do tej samej warstwy U wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{u} - \vec{v} \in \mathbb{W}$.

Korzystając z tej własności pokaż, że zbiór ciągów spełniających równanie rekurencyjne (dla każdego $n \geq 2$)

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + p(n)$$

dla pewnego wielomianu p jest warstwą przestrzeni ciągów spełniających równanie rekurencyjne (dla $n \geq 2$):

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Zadanie 11 (* nie liczy się do podstawy). Rozważmy równanie rekurencyjne postaci

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n-i} + p(n) \ ,$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są ustalone, zaś p jest wielomianem stopnia ℓ.

Pokaż, że istnieje wielomian q stopnia conajwyżej ℓ, taki że ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ spełnia to równanie wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n - q(n))_{n \geq 0}$ spełnia równanie

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{n-i} \ .$$

Wskazówka: Wyliczanie tego wielomianu wprost zapewne jest dość skomplikowane, wystarczy, że pokażesz istnienie. Analogicznie jak dla wielomianu stopnia 0 na wykładzie.