Lista 4

Zadanie 1. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x, y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$,
- $L'(x, y, z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$,
- $L''(x, y, z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$.

Zadanie 2 (* Nie liczy się do podstawy, choć nie jest takie trudne). Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora v.

Udowodnij uogólnienie tego faktu:
Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(\vec{v}) = \vec{0}$ dla dowolnego wektora $\vec{v}$, to zachodzi również $L^n(\vec{v}) = \vec{0}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $\vec{v}, L(\vec{v}), L^2(\vec{v}), \ldots, L^n(\vec{v})$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 3. Wyznacz bazy obrazu i jądra dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Wskazówka: Dla obrazu: skorzystaj z faktu: jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{V}$ to $\mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k)) = \operatorname{Im} F$.
Dla jądra: ułóż odpowiedni układ równań.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} \quad ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\operatorname{Im} F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Zadanie 5. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\dim(\operatorname{Im}(F)) = \dim(\mathbb{V})$.

Zadanie 6. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} = B \\
A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\
(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \\
\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) \\
A[B|C] = [AB|AC] \\
\left[\frac{B}{C}\right] A = \left[\frac{BA}{CA}\right]
\end{aligned}$$

Zadanie 7. Pokaż, że mnożenie macierzy jest łączne.

Wskazówka: Możesz korzystać bezpośrednio z definicji oraz z Zadania 6. Przy bardziej skomplikowanych zastanów się, czy nie korzystasz z łączności. Bardzo pomocne może być korzystanie z liniowości.

Zadanie 8. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową. Pokaż też, że dla takich macierzy (tj. kwadratowych spełniających $AB = BA$) zachodzi

$$(A+B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i} \quad .$$

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

Zadanie 9. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}^n \quad .$$

Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp.

Wskazówka: Pomocne może być przedstawienie macierzy jako $\alpha\,\mathrm{Id} + J$, gdzie $J = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n \cdot$ Skorzystaj z Zadania 8.

Zadanie 10. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Zadanie 11. Pokaż, że dla macierzy A, B odpowiednich rozmiarów zachodzi

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad ,$$
$$(A^T)^T = A \quad ,$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad .$$