Lista 5

Zadanie 1 (Macierze symetryczne). Kwadratową macierz $M = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy *symetryczną*, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$ dla każdego i, j (innymi słowy: $M^T = M$).

Niech M, N będą macierzami symetrycznymi rozmiaru $n \times n$. Pokaż, że:

- $M + N$ jest macierzą symetryczną;
- MN jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy gdy M, N komutują (tj. $MN = NM$).

Zadanie 2. Niech M, N będą macierzami górnotrójkątnymi. Pokaż, że:

- ich suma $M + N$ też jest macierzą górnotrójkątną;
- ich iloczyn też jest macierzą górnotrójkątną.

Pokaż też analogiczną własność macierzy dolnotrójkątnych.

Zadanie 3. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 4. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 5. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^T jest odwracalna i zachodzi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i zachodzi $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 6 (* Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.

Pokaż też, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy przekątniowej (może ona mieć zera na przekątnej).

Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że używając eliminacji Gaussa można sprowadzić macierz odwracalną do macierzy diagonalnej. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje. Dla macierzy nieodwracalnej skorzystaj z faktu używającego jednocześnie eliminacji na kolumnach i wierszach, potem postępuj podobnie.

Zadanie 7. Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 8. Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnotrójkątną/przekątniową/symetryczną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątna/górnotrójkątna/przekątniową/symetryczną.

Zadanie 9. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 10. Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;
- obrót przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara).

Zadanie 11. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopnia najwyżej 3. Rozważmy bazę x^0, x^1, x^2, x^3 tej przestrzeni i przekształcenie $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w tej bazie.