Lista 6

Zadanie 1. Podaj macierze zmiany bazy pomiędzy każdą z par poniższych baz:

- baza standardowa w $\mathbb{R}^3$;
- $[1,1,1]^T, [1,1,0]^T, [1,0,0]^T$;
- $[1,1,-1]^T, [1,-1,1]^T, [-1,1,1]^T$.

Zadanie 2. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Zadanie 3. Na wykładzie podany był dowód rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny. Uogólnij ten dowód na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaże, że dla dowolnego j zachodzi

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

oraz dla dowolnego i zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}),$$

gdzie $A_{i,j}$ jest minorem powstałym przez wykreślenie z macierzy A jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Wskazówka: Wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.

Zadanie 4. Rozważmy macierze A wymiaru $n \times n$, C wymiaru $m \times m$, B wymiaru $m \times n$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapiszmy ją jako **0**). Wtedy notacja

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz A wypełnia lewy górny róg, macierz B lewy dolny, macierz C prawy dolny a macierz **0** prawy górny). Pokaż, że

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C) \ .$$

Wskazówka: Wystarczy eliminacja Gaußa.

Zadanie 5. Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

Zadanie 6. Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 7 (* Alternatywny dowód tw. Cauchy'ego; nie liczy się do podstawy)**.** Zadanie to polega na pokazaniu alternatywnego dowodu tw. Cauchy'ego.

Niech A, B, C będą macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie $C = AB$ oraz $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(B) = n$.

Rozważ macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\operatorname{Id} & B \end{bmatrix}$. Ile wynosi jej wyznacznik?

Pokaż, że przy pomocy operacji kolumnowych (tj. zamiany kolumn i dodawania do kolumny wielokrotności innej kolumny) można macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\operatorname{Id} & B \end{bmatrix}$ przekształcić do macierzy $\begin{bmatrix} A & C \\ -\operatorname{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a tą do macierzy $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\operatorname{Id} \end{bmatrix}$. Ile wynosi wyznacznik tej macierzy?

Zadanie 8. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix} .$$

Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

Zadanie 9 (Wyznacznik macierzy klatkowej)**.** Dla macierzy kwadratowych $M_1, \dots, M_k$ rozważamy macierz M postaci (*macierz klatkowa*):

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{bmatrix} ,$$

tzn. przekątna M pokrywa się z przekątnymi macierzy $M_1, \dots, M_k$, a poza tymi macierzami M ma same zera. Pokaż, że

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i) \ .$$

Wskazówka: Pokaż najpierw dla dwóch macierzy.

Zadanie 10. Oblicz wyznacznik (nad $\mathbb{Z}_2$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 11. Skonstruuj macierz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \neq 0$, której przekształcenie F_M jest bijekcją między $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^2$, tj. dla $x, y \in \mathbb{Z}$ i $M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ mamy $x', y' \in \mathbb{Z}$ i analogicznie dla M^{-1}.

W tym celu pokaż, że:

- Wystarczy i potrzeba, że $M(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ i $M^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$.
- $M(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ jest równoważne z tym, że wszystkie elementy M są całkowite.
- Przypomnij jawny wzór na macierz odwrotną.