Lista 7

Zadanie 1. Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Pokaż, że układ równań uzyskany przez
- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez skalar $\alpha \neq 0$
- usunięcie trywialnego równania $\sum_i 0 \cdot x_i = 0$

jest równoważny wejściowemu.

Pokaż też, że jeśli macierz A' uzyskamy z macierzy A poprzez elementarne operacje wierszowe, to $\ker A = \ker A'$.

Wskazówka: Można na palcach, ale prościej jest zinterpretować (wszystko poza ostatnią operacją) jako wierszowe operacje elementarne, które są odwracalne.

Zadanie 3 (* nie liczy się do podstawy). Niech A będzie macierzą w postaci schodkowej (wierszowo) i niech każdy element wiodący w wierszu będzie równy 1. Wykonaj operacje wierszowe, tak by te elementy wiodące były jedyne w kolumnie. Jak wygląda baza jądra tak uzyskanej macierzy?

Wskazówka: Odpowiedź "rozwiązać układ równań" nie jest właściwa. Można uzasadnić wprost albo użyć algorytmu obliczania bazy jądra.

Zadanie 4. Dla jakich wartości p podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?

$$\begin{cases} 5x_1 + px_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ px_1 + px_2 + 2x_3 = 2 + p \end{cases}.$$

Zadanie 5. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases}.$$

Zadanie 6. Rozważmy grę, rozgrywającą się na prostokątnej planszy $n \times 1$. Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dotknąć konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i na sąsiednich. Celem gry jest zgaszenie wszystkich pól.

Dla jakich wartości n wygrana jest zawsze możliwa?

Podaj prosty algorytm, który rozwiązuje grę, jeśli jest to możliwe (istnieje algorytm zachłanny.)

Zadanie 7. Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Zadanie 8. Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 9. Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A to λ^k jest wartością własną A^k dla $k \geq 0$ (i tych samych wektorów własnych).

Pokaż, że jeśli A jest odwracalna to λ^{-1} jest wartością własną macierzy A^{-1} (dla tych samych wektorów własnych).

Zadanie 10. Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ są parami różnymi wartościami własnymi macierzy M a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ są odpowiadającymi wektorami własnymi, to $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ są układem liniowo niezależnym.

Wskazówka: Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

Zadanie 11. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$;
- $L'((x, y, z)) = (0, 0, y)$;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$.

Wskazówka: Czasami może być prościej wprost, bez przechodzenia przez macierze.