Lista 8

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M ma wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Zadanie 2 (* Nie liczy się do podstawy). Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B, które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie skorzystaj z reprezentacji macierzy jako iloczyn macierzy elementarnych i macierzy przekątniowej.

Zadanie 3. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

Wskazówka: $\det(A) = \det(A^T)$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy M, to suma (mnogościowa) baz przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Wskazówka: Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

Zadanie 5. Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

Zadanie 6. Niech $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A.

Zadanie 7. Dla wielomianu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ możemy zdefiniować naturalnie wartość tego wielomianu na macierzy kwadratowej, jako $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{k} a_i M^i$, gdzie $M^0 = \mathrm{Id}$.

Niech $M = AJA^{-1}$, gdzie J jest macierzą Jordana (tzn. na przekątnej ma klatki Jordana), zaś φ_M jej wielomianem charakterystycznym. Celem tego zadania jest pokazanie, że $\varphi_M(M)$ jest macierzą zerową.

(W pełnej ogólności to zadanie powinno mówić, że A, J są macierzami nad $\mathbb{C}$, ale w zasadzie nic nie zmienia to w dowodzie: wystarczy, że pokażesz to dla $\mathbb{R}$.)

Możesz pokazać to wg. następującego schematu.

- Pokaż tezę dla M będącej klatką Jordana:
- Pokaż, że dla macierzy Jordana J i wielomianu $p(x)$ mamy

$$p\left(\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_k) \end{bmatrix}$$

- Pokaż, że jeśli $p(x) = q(x)r(x)$ to $p(M) = q(M)r(M)$.
- Pokaż, że dla macierzy Jordana J mamy $\varphi_J(J) = 0$.
- Pokaż, że dla macierzy A, M oraz wielomianu $p(x)$ mamy $p(A^{-1}MA) = A^{-1}p(M)A$.

Zadanie 8. Pokaż, że:

- suma macierzy symetrycznych jest macierzą symetryczną;
- iloczyn macierzy symetrycznych A, B jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$;
- jeśli macierz symetryczna jest odwracalna, to jej macierz odwrotna jest symetryczna.

Zadanie 9. Dla wektora $\vec{V}$ niech $\sum \vec{V}$ oznacza sumę jego współrzędnych.

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla każdego $\vec{V}$ zachodzi

$$\sum(A\vec{V}) = \sum \vec{V} \quad . \tag{*}$$

Pokaż też twierdzenie odwrotne: macierz A, która ma wszystkie elementy nieujemne i która dla każdego $\vec{V}$ spełnia (*), jest macierzą stochastyczną.

Zadanie 10. Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich), jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Niech $M_1, \ldots, M_k$ będą macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Zadanie 11. Dla wektora $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ niech $\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$.

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$

$$\|A\vec{V}\|_1 \leq \|\vec{V}\|_1 \quad .$$

Wywnioskuj z tego, że A nie ma wartości własnej o wartości bezwzględnej większej niż 1.