Lista 9

Zadanie 1. Rozważmy graf o wierzchołkach $\{1, 2, 3, 4\}$ i krawędziach skierowanych $1 \to 2$, $1 \to 3$, $1 \to 4$, $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 1$, $4 \to 3$. Jak wygląda znormalizowana macierz sąsiedztwa tego grafu? Oblicz ranking dla tej macierzy, tzn. wektor własny dla wartości własnej o sumie współrzędnych 1.

Oblicz PageRank tego grafu dla $m = 0{,}25$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy klatkę Jordana J dla $|\lambda| < 1$, możesz założyć, że $\lambda \in \mathbb{R}$, choć zapewne dowód dla $\mathbb{R}$ uogólnia się do $\mathbb{C}$. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} J^n$ to macierz zerowa. Granicę rozumiemy tutaj punktowo, tj. macierz $J^\infty = \lim_{n\to\infty} J^n$, jeśli dla każdego i, j granica $\lim_{n\to\infty}(J^n)_{i,j}$ istnieje oraz $(J^\infty)_{i,j} = \lim_{n\to\infty}(J^n)_{i,j}$.

Wskazówka: Przedstaw macierz J jako $J = \lambda \mathrm{Id} + J'$. Rozwiń $(\lambda \mathrm{Id} + J')^n$ ze wzoru dwumianowego — można, bo J' oraz Id są przemienne. Jak wyglądają kolejne potęgi J'?

Zadanie 3. To zadanie pokazuje, że iteracyjna metoda obliczania PageRanku zbiega wykładniczo szybko.

Niech A będzie macierz stochastyczną (niekoniecznie dodatnią!) rozmiaru $n \times n$ a P macierzą stochastyczną $n \times n$ postaci

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} .$$

Dla liczby rzeczywistej $0 \le m \le 1$ niech M_m oznacza macierz

$$M_m = (1-m)A + mP .$$

Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|M_m \vec{V}\|_1 \le (1-m)\|\vec{V}\|_1 .$$

Możesz skorzystać (bez dowodu, choć jest on prosty) z faktu, że dla dowolnych wektorów $\vec{W}, \vec{U}$ zachodzi

$$\|\vec{U} + \vec{W}\|_1 \le \|\vec{U}\|_1 + \|\vec{W}\|_1 .$$

Wskazówka: Pokaż najpierw dla $m = 0$ oraz $m = 1$, dla $m = 0$ skorzystaj z Zadania 11 z poprzedniej listy.

Zadanie 4. Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że A nie ma wartości własnej -1.

Wskazówka: Rozpatrz A^2, rozumowanie podobne jak w przypadku grafów silnie spójnych. Jaka jest krotność geometryczna wartości własnej 1? Możesz korzystać z Twierdzeń udowodnionych na wykładzie.

Zadanie 5. Pokaż, że dla dowolnej macierzy kwadratowej M (odpowiedniego rozmiaru) zachodzi

$$\vec{U} \cdot (M\vec{V}) = (M^T\vec{U}) \cdot \vec{V} ,$$

gdzie $\cdot$ oznacza standardowy iloczyn skalarny.

Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$). Pokaż, że

$$\vec{U} \cdot (M\vec{V}) = (M\vec{U}) \cdot \vec{V} \qquad (**)$$

(zakładamy, że wymiary się zgadzają). Pokaż też własność odwrotną: jeśli M spełnia własność (**) dla każdych $\vec{U}, \vec{V}$, to M jest symetryczna.

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \ne \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych $\vec{V}$ oraz $\vec{U}$, to $\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$, tj. $\vec{V}$ i $\vec{U}$ są prostopadłe.

Wskazówka: Dla „własności odwrotnej”: jak wyglądają obie strony równości gdy rozpatrzymy je dla wektorów jednostkowych.

Zadanie 6. Udowodnij nierówność

$$|\vec{U} \cdot \vec{V}| \le \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|$$

dla $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$.

W miarę możliwości w inny sposób niż na wykładzie.

Wskazówka: Rozważ najpierw $\vec{U} \perp \vec{V}$, potem liniowo zależne a potem dowolne.

Zadanie 7. Udowodnij, że w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dla dowolnej pary wektorów $\vec{U}, \vec{V}$ zachodzi

$$\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| \iff (\vec{U} - \vec{V}) \perp (\vec{U} + \vec{V}) \ .$$

Zinterpretuj ten fakt jako stwierdzenie: „przekątne równoległoboku są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy równoległobok ten jest rombem”.

Wskazówka: Wyraź $\vec{U}, \vec{V}$ przez $\vec{U} - \vec{V}, \vec{U} + \vec{V}$.

Zadanie 8. Dla podanych poniżej układów wektorów podaj bazy dopełnień ortogonalnych przestrzeni liniowych przez nie generowanych:

- $[1, 0, 1]^T, [2, 3, 1]^T$ nad $\mathbb{R}$;
- $[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1]$ nad $\mathbb{Z}_2$;
- $[1, 0, 2]$ nad $\mathbb{Z}_3$.

Uwaga: w przestrzeniach $\mathbb{Z}_p^n$ dopełnienie ortogonalne $\mathbb{W}^\perp$ może nie być rozłączne z $\mathbb{W}$, może nawet zachodzić równość $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$.

Zadanie 9. Niech $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{F}^n$, rozpatrzmy standardowy iloczyn skalarny (na $\mathbb{F}^n$). Pokaż, że:

- $\mathbb{V}_1 \leq \mathbb{V}_2 \iff \mathbb{V}_1^\perp \geq \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp \cap \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp + \mathbb{V}_2^\perp$.

Zadanie 10 (* nie liczy się do podstawy, choć nietrudne). Pokaż, że dla każdego kodu liniowego istnieje kod mu równoważmy, który ma kodowanie systematyczne, tj. ma macierz generatorów postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Id} \\ M' \end{bmatrix}$$

Wskazówka: Eliminacja Gauβa na kolumnach.

Zadanie 11. Rozpatrzmy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia najwyżej 3. Zdefiniujmy iloczyn skalarny jako

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^i, x^j \rangle$ dla $0 \leq i \leq j \leq 3$.