Lista 10

Zadanie 1 (Macierz Grama). Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ w przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{V}$ wymiaru k jako

$$G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}) = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,k} \ .$$

Niech $B = \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$. Zdefiniujmy macierz $A = [(\vec{v}_1)_B \,|\, (\vec{v}_2)_B \,|\, \ldots \,|\, (\vec{v}_k)_B]$, tj. macierz, której j-ta kolumna to wektor z $\mathbb{R}^n$ będący wyrażeniem $\vec{v}_j$ w bazie B. Pokaż, że

$$G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}) = A^T A \ .$$

Korzystając z tej reprezentacji udowodnij, że

- $\det(G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ jest liniowo zależny.

Komentarz: Założenie, że wymiar przestrzeni i liczba wektorów w układzie są takie sama nie jest potrzebne, ale ułatwia rachunki.

Zadanie 2 (Nierówność Bessela; równość Parsevala). Niech $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ będą układem ortonormalnym (nie zakładamy, że jest bazą). Pokaż, że dla dowolnego wektora $\vec{v}$:

$$\sum_{i=1}^{k} |\, \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle \,|^2 \leq ||\vec{v}||^2 \ .$$

Co więcej, $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\vec{v}$ zachodzi równość.

Zadanie 3. Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(x)h(x) \mathrm{d}x \ .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany x^3 oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

Wskazówka: Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 4. Zortonormalizuj a nnastępnie uzupełnij do bazy ortonormalnej podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Zadanie 5. Pokaż, że „rzut prostopadły nie zwiększa długości”: niech P będzie rzutem prostopadłym na $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Wtedy dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{V}$ zachodzi

$$\|\vec{v}\|^2 = \|P\vec{v}\|^2 + \|v - P\vec{v}\|^2$$
$$\|\vec{v}\| \geq \|P\vec{v}\|$$

i równość w drugim przypadku zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v} \in \mathbb{W}$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową, zaś A jej bazą. Pokaż, że jeśli baza B powstaje z bazy A przez ortonormalizację Grama-Schmidta, to M_{BA} i M_{AB} są macierzami górnotrójkątnymi.

Zadanie 7. Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt α na płaszczyźnie;
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną;
- w $\mathbb{R}^2$ symetria względem prostej;
- w $\mathbb{R}^3$ symetria względem płaszczyzny.

Zadanie 8. Udowodnij, że złożenie izometrii jest izometrią.

Zadanie 9. Udowodnij, że jeśli M jest macierzą ortogonalną, to $\det(M) \in \{-1, 1\}$. Wywnioskuj z tego, że jeśli F jest izometrią, to $\det F \in \{-1, 1\}$.

Zadanie 10. Pokaż, że macierze ortogonalne są zamknięte na mnożenie, transpozycję i branie macierzy odwrotnej. Tj. jeśli A, B są ortogonalne (i tego samego rozmiaru), to również AB, A^T, A^{-1} są ortogonalne.

Zadanie 11 (Nierówność Hadamarda; * nie liczy się do podstawy)**.** Niech $M = [\vec{C}_1|\cdots|\vec{C}_n]$ będzie macierzą kwadratową o kolumnach $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n$. Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|\vec{C}_i\|$$

(gdzie $\|\cdot\|$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym) i że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n$ są układem ortogonalnym.

Wskazówka: Rozważ najpierw przypadek, gdy $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n$ są układem ortogonalnym. W ogólności przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje z wyrażeniami po dwóch stronach nierówności? W dowodzie możesz korzystać z innych zadań z tej listy, nawet jeśli nie umiesz ich pokazać.