Lista 11

Zadanie 1. Pokaż, że kryterium Sylvestera można testować w czasie $\mathcal{O}(n^3)$, czyli takim samym, jak czas liczenia pojedynczego wyznacznika.

Zadanie 2 (Algorytm Cholesky'ego; Rozkład Cholesky'ego)**.** Wiemy, że macierz dodatnio określoną $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ można przedstawić jako iloczyn $A^T A$, gdzie $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą górnotrójkątną.

Podaj algorytm obliczania A korzystający z tego rozkładu. Jaki jest jego czas działania?

Wskazówka: Obliczaj A kolejnymi kolumnami, od lewej do prawej i z góry na dół.

Zadanie 3. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 4. Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $A^T A$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} .$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz B możesz wziąć macierz M_{EA}, gdzie E to baza standardowa, zaś A: baza ortonormalna. Można też użyć bezpośrednio Algorytmu Cholesky'ego lub po prostu policzyć ręcznie korzystając z tego, że B można wziąć górnotrójkątną.

Zadanie 5. Pokaż, że macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.

Zadanie 6. Niech $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą dodatnio określoną. Udowodnij, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} m_{ii} .$$

Wskazówka: Przedstaw M jako $M = A^T A$ i skorzystaj z nierówności Hadamarda (dla A).

Zadanie 7 (Nie liczy się do podstawy *)**.** Pokaż, że symetryczna macierz $n \times n$ liczb rzeczywistych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.

Wskazówka: Wiemy, że dla macierzy symetrycznej suma krotności geometrycznych jej wartości własnych to n. Rozpatrz macierz Grama dla bazy ortogonalnej.

Zadanie 8. Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	b	a	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	b	a	c

Zadanie 9. Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

Zadanie 10. Rozważamy trzy grupy:

1. grupą symetrii trójkąta równobocznego (trzy obroty i trzy symetrie osiowe);
2. grupą obrotów sześciokąta foremnego;
3. grupą $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem $\bmod 6$).

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?

Zadanie 11. Pokaż, że dla $x_1, \dots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \dots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \cdots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \cdots (x_1)^{-z_1} .$$