Lista 12

Zadanie 1. Pokaż, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Wskazówka: Rozważ najmniejszą potęgę generatora, która należy do podgrupy. Pokaż, że jest to generator.

Zadanie 2. Pokaż, że zbiór symetrii trójkąta równobocznego jest izomorficzny z grupą wszystkich permutacji zbioru trzyelementowego S_3.

Zadanie 3. Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1); (1, 2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n-1$;
- $\langle (1, 2); (2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$.

Wskazówka: Dla pewnych zbiorów wiemy, że są one generatorami.

Zadanie 4. Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} .$$

podaj permutację odwrotną σ^{-1}; rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Podaj rząd σ oraz σ^{-1}.

Zadanie 5. Czy zbiór $\{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ z działaniem składania permutacji jest podgrupą grupy S_4? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzyelementowe to czy otrzymamy podgrupą S_4?

Wskazówka: Ile elementów miałaby podgrupa z drugiego punktu? Czy znasz jakąś podgrupę S_4, która ma tyle elementów?

Zadanie 6 (* nie liczy się do podstawy)**.** Dla macierzy $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ rozpatrzmy funkcje:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} ,$$

$$f'((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} .$$

Pokaż, że obie definiują wyznacznik.

Wskazówka: Możesz np. sprawdzić, że spełnia aksjomaty wyznacznika. Tylko zamiana kolumn jest nietrywialna: rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

Zadanie 7. Niech grupa G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ i $c \in \mathcal{C}$. Pokaż, że stabilizator G_c tego elementu jest podgrupą G.

Zadanie 8. Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremnego, sześcianu foremnego, ośmiościanu foremnego, dwunastościanu foremnego, dwudziestościanu foremnego. Wyznacza też rzędy grup obrotów i symetrii.

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 9. W grupie S_{10} rozpatrzmy grupy generowane przez

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
3. $(1, 6, 9)(2, 10)(3, 4, 5, 7, 8)$.

Dla każdego elementu ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ wyznacz jego orbitę oraz stabilizator dla naturalnego działania działania tych podgrup na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Zadanie 10. Ile jest nierozróżnialnych naszyjników mających 6 równo oddalonych korali tej samej wielkości, przy czym korale mogą być białe, czerwone lub zielone, a naszyjnik można obracać oraz „przełożyć na drugą stronę".

Zadanie 11. Ile jest nierozróżnialnych naszyjników mających 6 równo oddalonych korali tej samej wielkości, przy czym korale mogą są z jednej strony białe, a z drugiej czarne. Przy obrocie kolory się nie zmieniają, zaś przy „przełożeniu na drugą stronę" (symetrii) każdy kolor zmienia się na przeciwny.