Lista 14

Zadanie 1. Wyznacz największy wspólny dzielnik par wielomianów (o ile nie jest napisane inaczej: w $\mathbb{R}[x]$)

- $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60$ oraz $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$;
- $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$ oraz $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$ (w $\mathbb{Z}_3[x]$)
- $f = x^p + 1$, $g = x + 1$ (w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla p—pierwszego).

Wyraź nwd jako kombinację podanych wielomianów.

Wskazówka: Do ostatniego: policz, ile wynosi $(x + 1)^p$ w $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 2. Korzystając z tw. Bezout rozłóż poniższe wielomiany z $\mathbb{Z}_2[x]$ na czynniki nierozkładalne

$$x^5 + x^3 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + x^2 + 1, \quad x^5 + x^2 + x, \quad x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 + x^2 + x \ .$$

Potraktuj powyższe wielomiany jako wielomiany z $\mathbb{Z}_3[x]$ i również rozłóż je na czynniki nierozkładalne.

Wskazówka: Być może konieczne też będzie osobne zastanowienie się, które wielomiany drugiego stopnia są nierozkładalne.

Zadanie 3. Wielomian f ma resztę z dzielenia przez $x - c_1$ równą r_1 oraz resztę z dzielenia przez $x - c_2$ równą r_2. Ile wynosi reszta z dzielenia f przez $(x - c_1)(x - c_2)$?

Wystarczy, że zapiszesz zależność na współczynniki tego wielomianu, nie musisz jej rozwiązywać.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. Bezout.

Zadanie 4. Niech f, g, f', g', a będą niezerowymi wielomianami z pierścienia wielomianów $\mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$. Załóżmy, że $f = af'$ oraz $g = ag'$.

- Pokaż, że jeśli $h' = \mathrm{nwd}(f', g')$, to $\mathrm{nwd}(f, g) = ah'$. Jeśli $h' = a'f' + b'g'$ dla pewnych wielomianów $a', b' \in \mathbb{F}[x]$, to jak wyraża się $\mathrm{nwd}(f, g)$ poprzez wielomiany f, g?
- Jeśli h', r' są ilorazem oraz resztą z dzielenia f' przez g', to ile wynosi iloraz, a ile reszta z dzielenia f przez g?

Zadanie 5. Dane są dwa niezerowe wielomiany $f, g \in \mathbb{F}[x]$ z pierścienia wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$. Załóżmy, że $f = f'f''$ oraz $\mathrm{nwd}(f', g) = 1$. Celem zadania jest pokazanie, jak odtworzyć reprezentację $\mathrm{nwd}(f, g)$ jako kombinacji wielomianów f, g z analogicznych reprezentacji dla f'', g oraz f', g.

- Pokaż, że jeśli $h = af + bg$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{F}[x]$, $h|f, h|g$ to $h = \mathrm{nwd}(f, g)$. (nieobowiązkowy)
- Pokaż, że $\mathrm{nwd}(f, g) = \mathrm{nwd}(f'', g)$.
- Niech $\mathrm{nwd}(f'', g) = af'' + bg$ oraz $1 = \mathrm{nwd}(f', g) = cf' + dg$ dla odpowiednich wielomianów $a, b, c, d \in \mathbb{F}[x]$. Wyraź $\mathrm{nwd}(f, g)$ jako kombinację wielomianów f, g; kombinacja ta może używać kombinacji wielomianów spośród a, b, c, d, f', f'' jako współczynników.

Wskazówka: W pierwszym punkcie skorzystaj z tego, że $\mathrm{nwd}(f, g)$ istnieje. W drugim, z tego że $\mathrm{nwd}(f'', g)$ istnieje oraz z punktu pierwszego.

Zadanie 6. Oblicz wartości podanych wielomianów w punktach w odpowiednich pierścieniach:

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 1 \text{ w } 2, \text{ w } \mathbb{Z}_7; \quad 2x^3 - x^2 + x - 2 \text{ w } 1, \text{ w } \mathbb{Z}_3; \quad 3x^4 - 3x^3 + 4x - 5 \text{ w } 2, \text{ w } \mathbb{Z}_6$$

Zadanie 7. Podaj wszystkie nierozkładalne wielomiany stopnia 2 oraz 3 w $\mathbb{Z}_2[x]$ oraz wszystkie nierozkładalne wielomiany stopnia 2 w $\mathbb{Z}_3[x]$.

Wskazówka: Jeśli $f = gh$, to przynajmniej jeden z nich ma stopień 1.

Zadanie 8. Pokaż, że jeśli $\mathbb{F}$ jest ciałem, to w pierścieniu wielomianów $\mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$ zachodzi *prawo skreśleń*: dla $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$, gdzie $f \neq 0$, zachodzi

$$fg = fh \implies g = h \ .$$

Wywnioskuj z tego, że analogiczne prawo zachodzi też dla podzielności: dla $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$, gdzie $f \neq 0$, zachodzi

$$fg | fh \implies g | h \ .$$

Zadanie 9. Udowodnij uogólnienia twierdzenia z wykładu:

> Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem, f będzie wielomianem nierozkładalnym a $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ wielomianami w pierścieniu wielomianów $\mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z $\mathbb{F}$ oraz $f^k | p_1 p_2 \ldots p_\ell$. Wtedy istnieją liczby $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$, takie że $\sum_i n_i \geq k$ oraz dla każdego i zachodzi $f^{n_i} | p_i$.

Wskazówka: Skorzystaj z Zadania 8, nawet jeśli nie potrafisz go rozwiązać.

Zadanie 10 (* Nie liczy się do podstawy)**.** Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem zaś $\mathbb{F}[x]$ pierścieniem wielomianów o współczynnikach z tego ciała. Udowodnij, że każdy wielomian $f \in \mathbb{F}[x]$ da się przedstawić jednoznacznie (z dokładnością do kolejności czynników) w postaci

$$f = c \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_k \ ,$$

gdzie $c \in \mathbb{F}$ jest stałą, a każde $f_i \in \mathbb{F}[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym o wiodącym współczynniku równym 1.

Wskazówka: Założenie o współczynniku równym 1 jest tylko po to, by uniknąć arbitralności w wyborze współczynnika wiodącego, co prowadzi do „różnych" rozkładów.
Możesz skorzystać z Zadań 8–9, nawet jeśli nie potrafisz ich udowodnić.

Zadanie 11. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym o n elementach. Pokaż, że w $\mathbb{F}[x]$ prawdziwa jest zależność:

$$x^n - x = \prod_{a \in \mathbb{F}} (x - a) \ .$$

Wskazówka: Porównaj pierwiastki obydwu wielomianów oraz ich wiodące współczynniki.