Algebra 2023/24 — Egzamin część I

Czas: 180 minut.

Wszystkie Zadania D1–D6 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Wszystkie Zadania W1–W6 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Każde Zadanie T1 – T5 należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punktacja: po 10 punktów.

Osoby zaliczające **różnice programowe**: zadania D5, D6, W5, W6, T4, T5; czas: 75 minut.

Zadanie D1. Co to znaczy, że układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ rozpina podprzestrzeń $\mathbb{W}$? Co to znaczy, że U jest niezależny, a co, że U jest bazą $\mathbb{V}$? Co to jest wymiar przestrzeni liniowej?

Zadanie D2. Dla macierzy M, jak są zdefiniowane: wartość własna, wektor własny, wielomian charakterystyczny?

Zadanie D3. Niech $f, g \in \mathbb{R}[x]$ będą wielomianami o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$. Co to znaczy, że f dzieli g? Podaj definicję największego wspólnego dzielnika dzielnika f, g.

Zadanie D4. Jak jest zdefiniowany standardowy iloczyn skalarny, dla jakich przestrzeni można go tak zdefiniować? Jak jest zdefiniowany ogólny iloczyn skalarny, dla jakich przestrzeni można go tak zdefiniować?

Zadanie D5. Co to jest rząd permutacji? Co to jest cykl? Co to znaczy, że permutacja jest parzysta (definicja, nie sposób obliczania)?

Zadanie D6. Jakie dwie operacje są zdefiniowane w pierścieniu, jakie mają własności? Co to znaczy, że pierścień jest z jednością, a co, że przemienny? Co dodatkowo musi spełniać pierścień, by był ciałem?

Zadanie W1. Co umiesz powiedzieć o rzędzie obrazu przekształcenia liniowego i wymiarze jego jądra w porównaniu z wymiarami dziedziny i przeciwdziedziny? Jak rząd złożenia dwóch przekształceń liniowych ma się do rzędów tych przekształceń? Jaka jest zależność między rzędem macierzy M i M^T?

Zadanie W2. Dla układu równań $M\vec{X} = \vec{B}$, określ, kiedy ma on rozwiązanie (używając $M, \vec{B}$), podaj charakteryzację zbioru rozwiązań (używając M). Co więcej umiesz powiedzieć, jeśli układ jest kwadratowy, a macierz odwracalna?

Zadanie W3. Niech B, C będą bazami $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$, a $G, H : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ przekształceniami liniowymi, zaś $\alpha \in \mathbb{F}$. Co umiesz powiedzieć o $M_{BC}(G+H), M_{BC}(\alpha G)$, $M_{BC}(G) \cdot M_{CB}(H)$? Załóżmy dodatkowo, że B jest bazą ortonormalną $\mathbb{V}$; dla (ogólnego) iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$: podaj wzór na $M_{BB}(G)_{ij}$; co umiesz powiedzieć o $(\vec{u})_B \cdot (\vec{v})_B$ dla wektorów $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$?

Zadanie W4. Podaj znane Ci warunki konieczne i dostateczne na to, by macierz była dodatnio określona (były 4 istotnie różne). Chodzi zarówno o definicję jak i o alternatywne charakteryzacje.

Zadanie W5. Jakie znasz własności orbit (w tym liczby orbit), a jakie stabilizatora? Jaką zależność spełniają orbita i stabilizator elementu?

Zadanie W6. Jakie znasz własności funkcji φ Eulera, tj. jak ją można policzyć, co można policzyć używając jej?

Zadanie T1. Podaj bazy jądra i obrazu macierzy:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie T2. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań nad $\mathbb{R}$ w zależności od wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$?

$$\begin{cases} \lambda x & +2y & +\lambda z & = & 1 \\ 3x & +3y & +(\lambda+1)z & = & 2 \\ 5x & +4y & +3z & = & 3 \end{cases} .$$

Zadanie T3. Zortonormalizuj poniższy układ wektorów z $\mathbb{R}^4$ a następnie uzupełnij go do bazy ortonormalnej.

$$(2, 2, 0, -1)^T, (10, 4, 0, 1)^T, (-2, 10, 1, -11)^T$$

Zadanie T4. Oblicz największy wspólny dzielnik poniższych wielomianów $f, g \in \mathbb{R}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$. Przedstaw go jako kombinację postaci $af + bg$ dla pewnych wielomianów $a, b \in \mathbb{R}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$.

$$f = x^7 - x^6 + 2x^5 + x^3 + x^2 + 1 \ ,$$
$$g = x^5 - x^4 + x^3 \ .$$

Zadanie T5. Dane są permutacje:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 10 & 7 & 9 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\tau = (1, 5, 6)(2, 4, 10, 3, 7)(8, 9) \ .$$

Oblicz permutację

$$\rho = \tau^{-61}\sigma^{62} \ .$$

Podaj ρ^{-1}, rozkład ρ na cykle rozłączne, rząd ρ i parzystość ρ (jako permutacji).