Algebra 2023/24 — Egzamin Poprawkowy

Czas: 180 minut.

Wszystkie Zadania D1–D6 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Wszystkie Zadania W1–W6 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty.
Każde Zadanie T1–T5 należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punktacja: po 10 punktów.

Osoby zaliczające **różnice programowe**: zadania D5, D6, W5, W6, T4, T5; czas: 75 minut (lub całość egzaminu, tak samo jak na głównym egzaminie).

Zadanie D1. Dla danej przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ co to znaczy, że $\mathbb{W}$ jest jej podprzestrzenią? Dla zbioru wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jak jest zdefiniowane $\mathrm{LIN}(U)$? Dla $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ podprzestrzeni $\mathbb{V}$ jak jest zdefiniowana ich suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$?

Zadanie D2. Co to znaczy, że przekształcenie L jest liniowe? Jak jest zdefiniowany obraz, a jak jądro przekształcenia liniowego? Dla danej macierzy M, czym jest odpowiadające jej przekształcenie liniowe?

Zadanie D3. Dla dwóch skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz ich baz B, B' i przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ jak jest zdefiniowana macierz przekształcenia F wyrażona w bazach B, B'?

Jeśli B, B'' są skończonymi bazami $\mathbb{V}$, to jak jest zdefiniowana macierz zmiany bazy z B w B''?

Zadanie D4. Jak jest zdefiniowane dopełnienie ortogonalne zbioru wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ z przestrzeni $\mathbb{V}$ (dla standardowego i ogólnego iloczynu skalarnego)? Jak jest zdefiniowany rzut prostopadły wektora $\vec{v} \in \mathbb{V}$ z przestrzeni $\mathbb{V}$ na podprzestrzeń $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ (dla ogólnego iloczynu skalarnego)?

Zadanie D5. Niech $H \leq G$ będzie podgrupą G. Jak są zdefiniowane warstwy H w G?

Niech grupa G działa na zbiorze C. Dla danego elementu $c \in C$ jak jest zdefiniowany stabilizator c? Jak jest zdefiniowana orbita c?

Zadanie D6. Jak jest zdefiniowane dzielenie wielomianów? Co to znaczy, że wielomian f dzieli wielomian g? Co to znaczy, że wielomian f jest nierozkładalny?

Zadanie W1. Wymień znane Ci warunki na to, że U jest zbiorem liniowo zależnym (warunki z definicji i pokazane własności).

Zadanie W2. Jaka jest zależność między krotnością algebraiczną a geometryczną danej wartości własnej macierzy M rozmiaru $n \times n$?

Dla wartości własnej λ niech $\mathbb{V}_\lambda$ będzie przestrzenią liniową wektorów własnych dla tej wartości własnej. Co umiesz powiedzieć o $\mathbb{V}_\lambda$ i $\mathbb{V}_{\lambda'}$ dla $\lambda \neq \lambda'$? Co umiesz powiedzieć o sumie (po różnych wartościach własnych) wymiarów przestrzeni $\mathbb{V}_\lambda$?

Zadanie W3. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{R}$ z ogólnym iloczynem skalarnym

Co umiesz powiedzieć o: $\dim(\mathbb{W}^\perp)$; $\mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{W}$; $\mathbb{W}^\perp + \mathbb{W}$; $(\mathbb{W}^\perp)^\perp$?

Zadanie W4. Niech $L, L' : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będą izometriami. Które z przekształceń też są izometriami: $-L, 3L, L^{-1}, L \circ L', L + L', \frac{1}{2}(L + L')$? Co umiesz powiedzieć o $\det L$? Jeśli B jest bazą ortogonalną, to co umiesz powiedzieć o $M_{BB}(L)$?

Zadanie W5. Ile wynosi rząd cyklu długości k? Jak policzyć rząd permutacji znając jej rozkład na cykle rozłączne? Co umiesz powiedzieć o rzędach permutacji σ i σ^{-1}? Jak mają się do siebie rząd elementu i rząd grupy? Co umiesz powiedzieć o rzędzie $H \leq G$ w stosunku do rzędu G?

Zadanie W6. Podaj znane Ci twierdzenia dotyczące podzielności przez wielomian nierozkładalny. Podaj znane Ci twierdzenia dotyczące podzielności przez wielomiany nierozkładalne, których największy wspólny dzielnik jest stałą. Co umiesz powiedzieć o podzielności wielomianu przez jednomian $(x - \alpha)$?

Zadanie T1. Oblicz macierz odwrotną do poniższej macierzy (o elementach rzeczywistych).

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie T2. Dla poniższej macierzy liczb rzeczywistych oblicz jej wartości własne, podaj ich krotności geometryczne i algebraiczne.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie T3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{W} = \mathrm{LIN}((0,3,0,-3)^T, (0,5,0,1)^T) \leq \mathbb{R}^4$. Podaj dowolną bazę ortonormalną $\mathbb{W}$. Podaj dowolną bazę ortonormalną $\mathbb{W}^\perp$. Zrzutuj prostopadle wektor $(1,6,3,-2)^T$ na $\mathbb{W}$ i na $\mathbb{W}^\perp$.

Zadanie T4. Podaj liczbę całkowitą n spełniającą układ równań

$$\begin{cases} n \mod 555 & = 337 \\ n \mod 241 & = 211 \end{cases}$$

Liczbę możesz podać jako wyrażenie arytmetyczne, tj. przykładowo $34 \cdot 72 - 51 \cdot 23$.

Zadanie T5. Budujemy naszyjnik z 6 korali, korale są dwóch typów: białe z jednej strony i czarne z drugiej lub czerwone z jednej i niebieskie z drugiej. Każdy koral w naszyjniku jest widoczny z dokładnie jednej strony, tzn. są 4 możliwe kolory. Naszyjniki uznajemy za nierozróżnialne, jeśli jeden można przekształcić na drugi przez obrót lub symetrię (tj. „przewrócenia na drugą stronę"), przy czym przy symetrii każdy koral nie tylko zmienia miejsce, ale też kolor na ten po drugiej stronie: przykładowo, cały biały naszyjnik po symetrii staje się cały czarny.

Ile jest rozróżnialnych naszyjników? Możesz podać wynik jako wyrażenie arytmetyczne.

Nie musisz uzasadniać, że powyższe określenie jest dobrze zdefiniowanym działaniem odpowiedniej grupy.