

## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 2

1. Niech  $a$  będzie liczbą niewymierną i  $n$  liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że  $[an] + [(1-a)n] = n - 1$ . Jak wygląda analogiczna równość dla powały?
2. Oblicz dla dowolnych naturalnych  $x \in \mathbb{R}$  i  $m \in \mathbb{N}$  wyrażenie  $[x/m] + [(x+1)/m] + \dots + [(x+m-1)/m]$ .
3. Dla każdej z następujących zależności rekurencyjnych określ liczbę warunków początkowych niezbędnych do jednoznacznego określenia wartości elementów ciągu dla wszystkich  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(a) a_n = na_{n-2}, \quad (b) a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, \quad (c) a_n = 2a_{[n/2]} + n.$$

4. Rozwiąż następujące zależności:

$$(a) f_n = f_{n-1} + 3^n \text{ dla } n > 1 \text{ i } f_1 = 3;$$

$$(b) h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n \text{ dla } n > 1 \text{ i } h_1 = 1;$$

$$(c) l_n = l_{n-1}l_{n-2} \text{ dla } n > 2 \text{ i } l_1 = l_2 = 2.$$

5. Rozwiąż zależności rekurencyjne

$$(a) a_0 = 1, a_n = 2/a_{n-1},$$

$$(b) b_0 = 0, b_n = 1/(1 + b_{n-1}),$$

$$(c) c_0 = 1, c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i,$$

$$(d) d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}.$$

6. Rozwiąż zależności rekurencyjne

$$(a) y_0 = y_1 = 1, y_n = (y_{n-1}^2 + y_{n-2})/(y_{n-1} + y_{n-2})$$

$$(b) z_0 = 1, z_1 = 2, z_n = (z_{n-1}^2 - 1)/z_{n-2}$$

$$(c) t_0 = 0, t_1 = 1, t_n = (t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2/4$$

7. Rozwiąż zależności rekurencyjne

$$(a) a_0 = 1, a_{n+1} = (n+1)a_n + 1,$$

$$(b) b_0 = 1/2, nb_n = (n-2)b_{n-1} + 1,$$

$$(c) c_0 = 0, nc_n = (n+2)c_{n-1} + n + 2,$$

$$(d) d_0 = 1, d_1 = 2, nd_n = (n-2)!d_{n-1}d_{n-2}.$$

8. Rozwiąż zależność rekurencyjną  $a_n = (1 + a_{n-1})/a_{n-2}$  przy warunkach początkowych  $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$ . Jakie muszą być  $\alpha, \beta$ , żeby ciąg  $a_n$  był określony dla wszystkich  $n$ ?

9. Rozwiąż zależności rekurencyjne

$$(a) f(1) = 1, f(n) = f([n/2]) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1,$$

$$(b) g(0) = 0, g(n) = g([n/2]) + \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

10. Podwójna wieża Hanoi składa się z  $2n$  krążków  $n$  różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych by przenieść wieżę z pręta  $A$  na  $B$ , gdy krążki równej wielkości nie są rozróżnialne.

11. Na płaszczyźnie danych jest  $n$  okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Rozwiąż zadanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

12. Ile najwięcej kawałków sera można uzyskać z pojedynczego grubego kawałka za pomocą  $n$  cięć nożem? Zakładamy że każde cięcie jest wyznaczone przez płaszczyznę przecinającą kawałek sera.

13. Sprawdź, że liczby harmoniczne  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  spełniają zależność rekurencyjną  $H_n = \frac{1}{n}(H_{n-1} + H_{n-2} + \dots + H_1) + 1$  dla  $n > 1$ .

14. Wykaż prawdziwość równości (F.Lucas, 1842-1891):

$$(a) F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

$$(b) F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} \text{ dla } n \geq 1,$$

$$(c) F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}, \quad (d) F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}.$$

15. Pokaż, że  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ . Dla jakich  $n$  mamy  $F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ?