

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 5

1. Niech $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$, ϕ będzie funkcją Eulera i $\psi(n) = \text{lcm}(\phi(p_1^{n_1}), \phi(p_2^{n_2}), \dots, \phi(p_s^{n_s}))$. Udowodnij, że dla $a \perp n$ zachodzi $n|a^{\psi(n)} - 1$.
2. Pokaż, że $\sum_{d:d|n} \phi(d) = n$.
3. Pokaż wzór: $\log \text{lcm}(1, 2, 3, \dots, n) = \sum_{p \in \mathbb{P}} [\log_p n] \log p$.
4. Udowodnij następujące stwierdzenia za pomocą zasady szufladkowej
 - (a) W turnieju każda drużyna gra z każdą inną dokładnie raz. W każdym momencie trwania turnieju istnieją dwie drużyny, które rozegrały tyle samo meczów.
 - (b) Wśród pięciu punktów wybranych w trójkącie równobocznym o boku 1, istnieje przynajmniej jedna para punktów odległych od siebie o co najwyżej $\frac{1}{2}$.
 - (c) Każdy wielościan wypukły zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.
5. Pokaż, że w dowolnym zbiorze S złożonym z 10 liczb naturalnych mniejszych od 100, zawsze istnieją dwa rozłączne podzbiory o tej samej sumie.
6. Niech $n, k, r, s \in \mathbb{N}$ i $0 \leq r, s < n$. Mamy $nk + r$ kulek rozmieszczonych w n szufladkach. Pokaż, że w pewnych s szufladkach znajduje się w sumie co najmniej $sk + \min\{r, s\}$ kulek.
7. Załóżmy, że jeśli dwie osoby się znają to albo się lubią albo nie. Pokaż, że wśród 6 osób istnieją albo 3 które się parami nie znają albo 3, które się wzajemnie znają. Pokaż, że wśród 17 osób istnieją 3 które się (parami) lubią, nie lubią, lub nie znają.
8. Na szachownicy $n \times m$ dla $n \leq m$ umieszczono $m(k - 1) + 1$ wież. Pokaż, że istnieje takich k wież które nie atakują się wzajemnie.
9. Ile jest pięciocyfrowych numerów telefonów, w których **dokładnie jedna** cyfra występuje więcej niż jeden raz? A ile jest, gdy **przynajmniej jedna** cyfra występuje więcej niż jeden raz?
10. Ile jest różnych rozłożeń wszystkich białych i czarnych figur i pionków szachowych na szachownicy? Ile jest rozłożeń w których para gońców każdego z kolorów zajmuje pola różnych kolorów.
11. Pokaż, że liczba przedstawień n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$, jeśli przedstawienia na różniące się kolejnością składników uważamy za różne. Ile jest przedstawień n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?
12. Na teren fabryki, w której pracuje n osób prowadzi k wejść. Przy każdym wejściu jest wyłożona lista obecności, na którą kolejno wpisują się pracownicy wchodzący tym wejściem w danym dniu (każdy wpisuje się na dokładnie jedną listę). Na ile sposobów mogą zostać wypełnione listy obecności w tym dniu (liczy się również kolejność na listach)? Ile jest takich sposobów, w których żadna z list nie jest pusta?
13. Udowodnij następujące wzory
 - (a) tożsamość absorpcyjna: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, dla $k \neq 0$.
 - (b) wzór na sumowanie po górnym wskaźniku: $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, dla $m, n \geq 0$.
14. Podaj interpretację w terminach zbiorów następujących tożsamości
 - (a) tożsamość Cauchy'ego: $\binom{m+n}{r} = \sum_{s=0}^r \binom{m}{s} \binom{n}{r-s}$
 - (b) $\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-k}$.
15. Udowodnij indukcyjnie małe twierdzenie Fermata mówiące, że dla dowolnej liczby pierwszej p i naturalnej a

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Wsk.: rozwiń $(a+1)^p$ posługując się wzorem dwumiennym i określ kiedy $\binom{p}{i}$ dzieli się przez p .