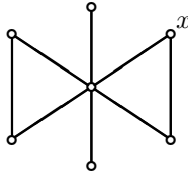
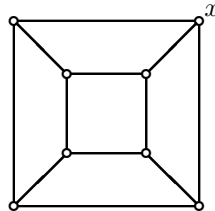


## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 9

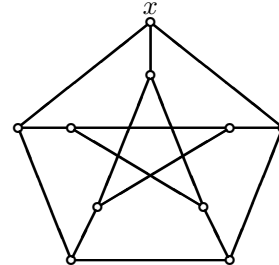
1. *Problem przwoźnika*. Przewoźnikowi powierzono przewiezienie przez rzekę wilka, kozy i kosza z kapustą. Oprócz przewoźnika łódka może pomieścić tylko jeden z tych przedmiotów. Jak musi postąpić przewoźnik, jeżeli nie może pozostawić samych ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą? Narysuj graf ilustrujący rozwiązanie tego problemu.
2. Oblicz rzędy grup automorfizmów (izomorfizmów na siebie)  $G$  grafu z Rys. 1 i grafu kostki 3-wymiarowej (Rys. 2). W tym celu oblicz dla każdego z nich  $|G_x|$  i  $|O_x|$ .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

3. Wykonaj polecenie z poprzedniego zadania dla grafu Petersena (Rys. 3).
4. Wykaż, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieją dokładnie cztery grafy z trzema wierzchołkami i jednaście z czterema wierzchołkami.
5. Narysuj wszystkie nieizomorficzne sześciowierzchołkowe grafy 3-regularne.
6. Przez  $Q_k$  oznaczamy graf  $k$ -wymiarowej kostki, tj. wierzchołkami w  $Q_k$  są wszystkie  $k$ -elementowe ciągi zer i jedynek, oraz dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że  $n(Q_k) = 2^k$  i  $m(Q_k) = k2^{k-1}$ . Udowodnij, że  $Q_k$  jest grafem dwudzielnym.
7. Niech  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Określ liczbę nieidentycznych
  - (a) grafów prostych o zbiorze wierzchołków  $V$ .
  - (b) grafów o zbiorze wierzchołków  $V$  i  $m$  krawędziach, jeśli dopuszczamy pętle i krawędzie wielokrotne.
  - (c) digrafów jak w poprzednim podpunkcie.
8. Udowodnij, że w dwudzielnym grafie o  $n$  wierzchołkach, liczba krawędzi jest równa co najwyżej  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ .
9. Udowodnij, że przynajmniej jeden z grafów  $G, \bar{G}$  jest spójny ( $\bar{G}$  to dopełnienie  $G$ ).
10. Udowodnij, że graf prosty  $G = (V, E)$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy  $G_v$ , będące wynikiem usunięcia z  $G$  wierzchołka  $v$  z przyległymi krawędziami, są spójne ( $n(G) > 2$ ).
11. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe drogi proste mają wspólny wierzchołek.
12. Udowodnij, że graf prosty o  $n$  wierzchołkach ma co najwyżej  $\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$  krawędzi, gdzie  $p$  jest liczbą składowych spójności. Ile ma on co najmniej krawędzi przy  $p$  składowych spójności?
13. Każdą cząsteczkę węglowodoru o wzorze sumarycznym  $C_k H_{2k+2}$  można przedstawić w postaci grafu (spójnego). W grafie tym krawędzie oznaczają wiązania chemiczne. Każdy atom wodoru ( $H$ ) związany jest z jednym innym atomem, a każdy atom węgla ( $C$ ) związany jest z czterema innymi atomami. Pokaż, że graf ten dla węglowodoru  $C_k H_{2k+2}$  jest drzewem. Każde dwa nieizomorficzne grafy tego typu wyznaczają różne izomery. Ile jest różnych izomerów  $C_5 H_{12}$ ?
14. Niech  $d_1, d_2, \dots, d_n$  będzie ciągiem liczb naturalnych (dodatnich). Pokaż, że  $d_i$  jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa **wtedy i tylko wtedy**, gdy

$$\sum d_i = 2(n-1).$$

15. Niech  $l_1$  oznacza liczbę wierzchołków wiszących drzewa, a  $l_2$  liczbę wierzchołków stopnia większego niż dwa. Pokaż, że  $l_1 \geq l_2 + 2$ . Opisz drzewa dla których zachodzi równość.