

## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 10

1. Załóżmy, że grafy  $G_1$  i  $G_2$  są określone na tym samym zbiorze wierzchołków  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Podaj algorytm o złożoności  $O(n + m)$  sprawdzający, czy  $G_1$  i  $G_2$  wczytane jako listy krawędzi grafów są identyczne.
2. Podaj przykłady (o ile istnieją):
  - (a) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków 1,2,2,3,3;
  - (b) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków 1,1,1,3,4;
  - (c) grafu prostego dwudzielnego o ciągu stopni wierzchołków 2,2,2,2,2.
3. Średnicą  $d(G)$  grafu  $G$  nazywamy maksymalną odległość między wierzchołkami grafu, to znaczy  $d(G) = \max\{d(x, y) | x, y \in V(G)\}$ . Udowodnij, że jeżeli  $d(G) > 3$ , to  $d(G) < 3$ .
4. Udowodnij, że jeżeli  $d(G) = 2$  i  $\max\{\deg(v) | v \in V(G)\} = n - 2$ , to  $m \geq 2n - 4$ .
5. Dla każdego wierzchołka  $v$  grafu  $G = (V, E)$  definiujemy  $r(v) = \max\{d(v, u) | u \in V(G)\}$ . Wierzchołek  $x_0$ , dla którego  $r(x_0) = \min\{r(v) | v \in V(G)\}$  nazywamy *wierzchołkiem centralnym*, a liczbę  $r(G) = r(x_0)$  *promieniem* grafu  $G$ .
  - (a) Udowodnij, że  $r(G) \leq d(G) \leq 2 \cdot r(G)$ ,
  - (b) (Jordan). Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo dwóch sąsiednich.
  - (c) Podaj algorytm wyznaczania wierzchołka centralnego w drzewie oraz określ jego złożoność.
6. Graf prosty  $G$  jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swym dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf  $n$  wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy  $n \equiv 0$  lub  $n \equiv 1$  modulo 4.

Wsk.: Gdy  $n \equiv 0$  możesz oprzeć konstrukcję na podziale zbioru  $V$  na cztery części. Gdy  $n \equiv 1$  do poprzedniej konstrukcji można dodać jeden wierzchołek.

7. Niech  $C_1, C_2, \dots, C_{m-n-1}$  będą zbiorami krawędzi wszystkich  $m - n + 1$  cykli otrzymanych poprzez dodanie do drzewa spinającego  $T$  grafu prostego  $G$  jednej krawędzi  $G$  która nie należy do  $T$ . Pokaż, że zbiór krawędzi dowolnego cyklu w  $G$  jest różnicą symetryczną pewnej liczby zbiorów wybranych spośród  $C_1, C_2, \dots, C_{m-n-1}$ .
8. *Grafem krawędziowym*  $L(G)$  grafu  $G$  nazywamy graf, którego wierzchołkami są krawędzie  $G$  i między  $e_1, e_2 \in E(G)$  jest krawędź gdy  $e_1$  i  $e_2$  mają wspólny wierzchołek w  $G$ . Niech  $B$  będzie macierzą incydencji  $G$ ,  $C$  macierzą sąsiedztwa  $L(G)$ , a  $I$  macierzą identycznościową. Pokaż, że  $C = B^T B - 2I$ .
9. Udowodnij, że w grafie  $G$ , w którym maksymalny stopień wierzchołka wynosi  $p$ , promień grafu spełnia nierówność:

$$r(G) \geq \frac{\log(np - n + 1)}{\log(p)} - 1.$$

10. Ile jest  $n$ -wierzchołkowych drzew poetykietowanych, w których każdy wierzchołek  $i$  ma dany stopień  $d_i$ ? Najpierw określ jaki warunek musi spełniać ciąg  $d_i$ .
11. Losujemy drzewo o wierzchołkach  $\{1, 2, \dots, n\}$  (każde drzewo jest tak samo prawdopodobne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wierzchołek 1 jest liściem? Do czego prawdopodobieństwo to dąży przy  $n \rightarrow \infty$ ?
12. Pokaż, że dla  $n > 2$  istnieją  $n^{n-3}$  rozróżnialne drzewa  $n$  wierzchołkowe z krawędziami ponumerowanymi od 1 do  $n - 1$ .
13. Pokaż, że każdy graf nie zawierający trójkątów (cykli długości 3) ma nie więcej, niż  $\lfloor n^2/4 \rfloor$  krawędzi.  
Wsk.: Rozważ osobno  $n$  parzyste i nieparzyste
14. Niech  $G$  będzie grafem prostym o minimalnym stopniu wierzchołka  $d > 1$ . Pokaż, że  $G$  zawiera cykl o długości równej co najmniej  $d + 1$ .
15. Graf jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy gdy jest spójny i nie zawiera wierzchołka rozcinającego. Pokaż, że następujące dwa warunki są równoważne 2-spójności grafu o co najmniej trzech wierzchołkach
  - (a) każde dwa wierzchołki leżą na cyklu,
  - (b) każde dwie krawędzie leżą na cyklu.