16 stycznia 2025

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 14

1. Co można powiedzieć o macierzy sąsiedztwa grafu i jego dopełnienia? Podaj interpretację wektorów AI i A^2I, gdzie I jest wektorem jednostkowym oraz A jest macierzą sąsiedztwa grafu G (działaniem jest mnożenie macierzy i wektorów o wsp. całkowitych).

2. Hiperkostką wymiaru k nazywamy graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \{0,1\}^k$ (wszystkie ciągi k bitów), a krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ich zapis binarny różni się na dokładnie jednej pozycji. Pokaż, że między dwoma różnymi wierzchołkami k-wymiarowej hiperkostki istnieje k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.

3. (Grafy Mycielskiego) Graf M_2 to dwa wierzchołki połączone krawędzią. Graf M_{k+1} konstruujemy z M_k w ten sposób, że dokładamy dla każdego $v \in V(M_k)$ wierzchołek v' i łączymy go z wszystkimi sąsiadami v w M_k; następnie dodajemy jeszcze jeden wierzchołek w i łączymy go z wszystkimi wierzchołkami v'. Pokaż przez indukcję po k, że
   (a) graf M_k nie ma trójkątów (klik K_3);
   (b) graf M_k jest k-kolorowalny;
   (c) graf M_k nie jest $(k-1)$-kolorowalny.

4. Niech G będzie grafem o $2n$ wierzchołkach, którego wszystkie stopnie wierzchołków wynoszą co najmniej n. Pokaż, że G ma pełne skojarzenie tzn. skojarzenie n–krawędziowe.

5. Podaj wielomianowy algorytm znajdujący liczbę chromatyczną G, jeśli $\deg(G) \leq 3$.

6. Mamy daną grupę n dziewcząt i m chłopców. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by k dziewcząt mogło znaleźć męża (wewnątrz grupy), jest to, by każde r dziewcząt znało przynajmniej $k + r - n$ chłopców.

   Wsk.: Dodaj $n - k$ chłopców akceptowanych przez wszystkie dziewczyny i zastosuj tw. Halla

7. W niektórych krajach mężczyzna może mieć do czterech żon. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym w takim kraju na to, aby n dziewcząt mogło znaleźć mężów, jest to by każde k z nich znało w sumie przynajmniej $k/4$ chłopców.

8. Udowodnij, że drzewo ma co najwyżej jedno pełne skojarzenie.

9. Niech A będzie macierzą sąsiedztwa grafu dwudzielnego $G = (V_1, V_2; E)$, w którym $|V_1| = |V_2|$. W macierzy A wiersze odpowiadają wierzchołkom z V_1, a kolumny wierzchołkom z V_2 i $a_{ij} = 0, 1$ w zależności od tego, czy istnieje połączenie między odpowiednimi wierzchołkami. Jaka jest zależność między skojarzeniami w G i wartością permanentu

$$\mathrm{perm}(A) = \sum_{\sigma-\text{permutacja}} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}?$$

10. Pokaż, że dwudzielny graf d–regularny posiada pełne skojarzenie.

11. Pokaż, że graf 3-regularny posiadający cykl Hamiltona ma indeks chromatyczny równy 3.

12. (a) Niech wszystkie wierzchołki G poza v mają stopień d i niech indeks chromatyczny G wynosi d. Pokaż, że $n = |V(G)|$ jest nieparzyste i $\deg(v) = 0$.
    (b) Pokaż, że graf d-regularny G posiadający wierzchołek rozcinający ma indeks chromatyczny równy $d + 1$.

13. Pokaż, że indeks chromatyczny $\chi'(K_n)$ jest równy $n - 1$, gdy n jest parzyste i n, gdy n jest nieparzyste.

14. Pokaż wielomianową redukcję problemu istnienia w grafie G pokrycia wierzchołkowego rozmiaru k do problemu istnienia w grafie H kliki rozmiaru k'.

15. Pokaż, że jeśli można rozstrzygnąć, czy graf dowolny graf jest 4-kolorowalny w czasie wielomianowym, to da się również rozstrzygnąć, czy dowolny graf jest 3-kolorowalny w czasie wielomianowym.

16. Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem izomorfizmu grafów do problemu izomorfizmu grafów dwudzielnych.

17. Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem istnienia drogi Hamiltona w grafie do problemu istnienia w nim drzewa spinającego o stopniu nie większym, niż 2025.

18. Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem istnienia cyklu Hamiltona w dowolnym digrafie do problemu istnienia cyklu Hamiltona w nieskierowanym grafie dwudzielnym.