

Przykład 6.12 (Wyznacznik macierzy Vandermonde'a). Niech $q_1, q_2, \dots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz $(n \times n)$ Vandermonde'a $V_n = V(q_1, \dots, q_n)$ ma wyrazy równe $(V_n)_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$$V(q_1, \dots, q_n) = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \dots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \dots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$\det(V_1 | \dots | V_n)$$

- wielomianowa
- zam. kol. zm. m.
- $\det(I_d) = 1$
- dod. do kol. wiel. i mniej nie zm. w.

Pokażemy, że

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i).$$

W szczególności implikuje to, jeśli q_i są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

$$\begin{array}{c} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \dots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \dots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{array} \right. \end{array}$$

Od i -tego wiersza od. 1-ry

$(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 1$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \begin{array}{c} q_2 - q_1 \\ \vdots \\ q_n - q_1 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} q_2^2 - q_1^2 & \dots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^2 - q_1^2 & \dots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{array} \right. \end{array}$$

$q_i^j - q_1^j$

$$q_i^j - q_1^j = (q_i - q_1) \left(\sum_{k=0}^{j-1} q_i^k q_1^{j-1-k} \right)$$

Od j -tego kol. odjąć $q_1 \cdot (j-1)$ razy

$$\begin{aligned} & (q_i^j - q_1^j) - q_1 (q_i^{j-1} - q_1^{j-1}) \\ &= q_i^{j-1} (q_i - q_1) \end{aligned}$$

$$\rightarrow (q_i - q_1) q_i^0 (q_i - q_1) q_i^1 \dots (q_i - q_1) q_i^{n-2}$$

$$q_i - q_1$$

$$\prod_{j=2}^{n-1} (q_j - q_1)$$

wyrm. $V \rightarrow$

$$\begin{matrix} q_i^0 & & q_i^1 & & q_i^{n-2} \\ \begin{pmatrix} q_2^0 & q_2^1 & \dots & q_2^{n-2} \\ q_3^0 & q_3^1 & \dots & q_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_n^0 & q_n^1 & \dots & q_n^{n-2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i)$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_i - q_j)$$

6.3 Wyznacznik a macierz odwrotna

Fakt 6.13. Jeśli M jest odwracalna, to

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}.$$

$$\operatorname{rk}(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$$

$$|M| \cdot |M^{-1}| = |Id| = 1$$

$$|M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$$

Lemat 6.14. Macierz odwrotna do macierzy A jest równa

$$\frac{1}{\det(A)} C^T, \text{ gdzie } c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{i,j}|.$$

$$n^2 \cdot (n-1)^3 \sim O(n^5)$$

JAWNY WZÓR

$$\left(\frac{1}{|A|} \cdot C^T \cdot A \right)_{ij} = ? \quad Id?$$

wym. mierniwa

$$(C^T \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^n C^T_{ik} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} |A_{k,i}| a_{k,j}$$

$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} (a_{k,i} |A_{k,i}|)$ po i -tej kol.

$\approx$ rozw. Laplace'a

i -ta

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,j} & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,j} & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,j} & a_{i,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,j} & a_{n,i} \end{vmatrix}$$

Rozw. Laplace'a dla A z $A_{j,i}$ w miejscu A_i

$$(C^T \cdot A)_{ij} = |A^{ji}| = \begin{cases} |A| & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{|A|} \cdot C^T \cdot A \right)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|A|} \cdot |A| & i=j \\ \frac{1}{|A|} \cdot 0 & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Przykład 6.15. Dzięki Lematowi 6.14 można np. łatwo policzyć macierz odwrotną do macierzy 2×2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

6.4 Wyznacznik przekształcenia

Potrafiemy zdefiniować wyznacznik dla macierzy, ale co z przekształceniem liniowym? Każde przekształcenie zadaje macierz, ale ta macierz zależy od bazy. Okazuje się, że wartość wyznacznika nie.

$$|F| := |M_{BB}(F)| \quad F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \quad B \quad B'$$

$$|M| = |M'|$$

Lemat 6.16. Niech $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym, zaś M, M' będą macierzami dla tego przekształcenia wyrażonymi w różnych bazach. Wtedy

$$|M_{B'B}(F)| = |M_{B'B}| \cdot |M_{BB}(F)| \cdot |M_{B'B}^{-1}| = |M_{BB}(F)|$$

$$|M| = |M'|$$

Definicja 6.17. Dla przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ jego wyznacznik $\det(F)$ to $\det(M)$ gdzie M jest macierzą tego przekształcenia wyrażoną w dowolnej bazie $\mathbb{V}$.

$$\begin{cases} a x + b y = c \\ a' x + b' y = c' \end{cases}$$

Rozdział 7

Układy równań liniowych i ich rozwiązywanie

Rozważmy układ równań postaci (zwany dalej *układem równań liniowych*)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$(a_{ij}) \quad i=1 \dots m, \quad j=1 \dots n$
 $\nearrow$
 A

Będziemy zapisywać równania w postaci

$$\underline{A \cdot \vec{X} = \vec{B}}, \quad (7.1)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

$A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n$

7.1 Interpretacja „pionowa”

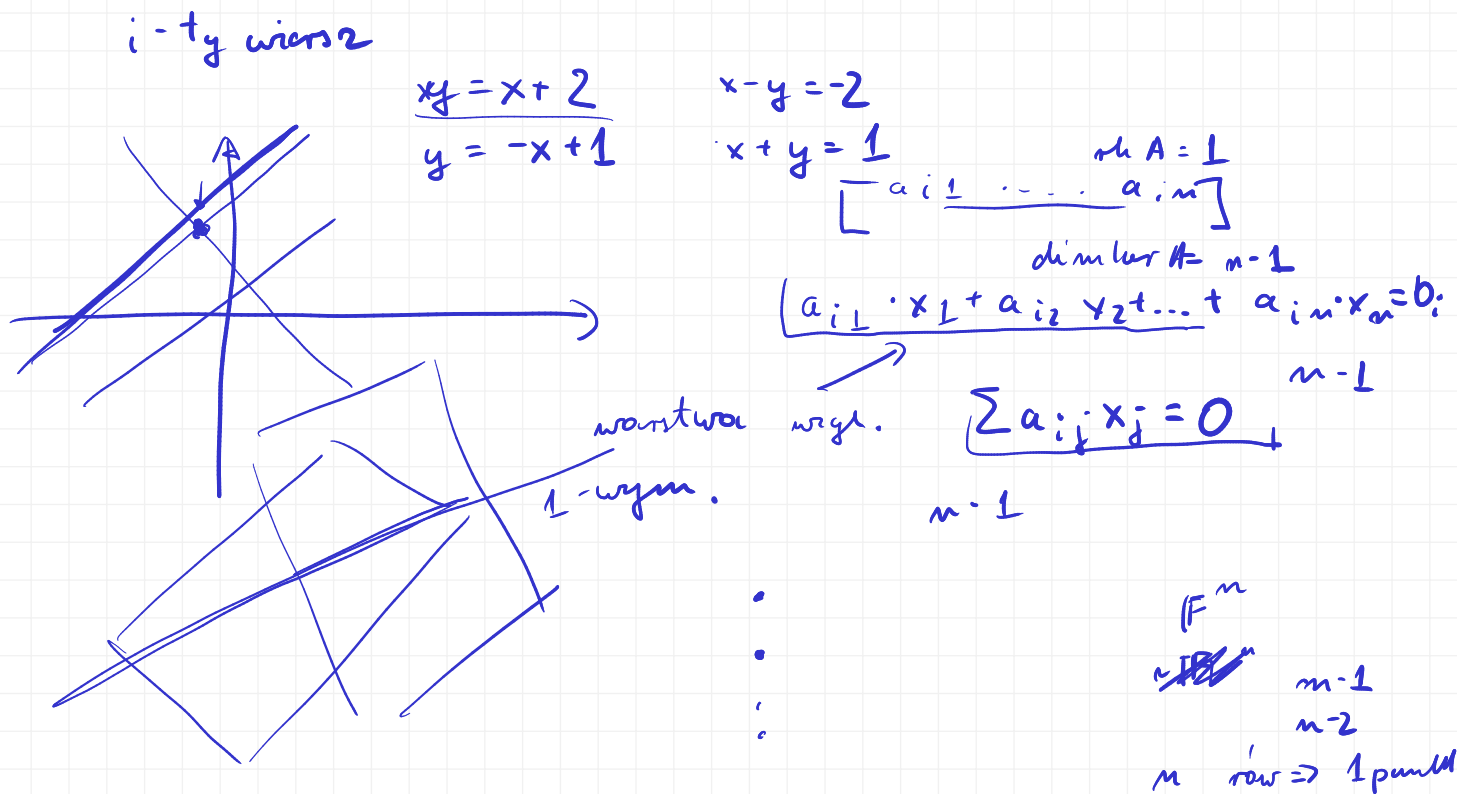
Zauważmy, że układ ten można zinterpretować jako (przyjmijmy $A = [\vec{A}_1 | \dots | \vec{A}_n]$):

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{X} &= A \cdot \underbrace{\sum x_i \vec{E}_i}_{\vec{X}} = \sum x_i \underbrace{A \cdot \vec{E}_i}_{A_i} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{(\vec{A}_i)}_{i\text{-ta kolumna}} = \vec{B} \end{aligned}$$

Czyli jaką kombinację liniową wektorów $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$ należy wziąć, by dostać wektor $\vec{B}$.

7.2 Interpretacja „pozioma”

Każde równanie z osobna wyznacza warstwę względem przestrzeni $n-1$ -wymiarowej (wektorów spełniających ustalone równanie).



7.3 Bazowy przypadek: n zmiennych, n równań, macierz odwrotna

Int. pionowa $\sum x_i A_i$

Int. pozioma $\text{wym. sp. o } 1$
 $\Rightarrow \text{punkt}$

Intuicja: w najprostszym przypadku, gdy A jest macierzą kwadratową, możemy odwrócić A i nałożyć obustronnie na równanie, uzyskując

I tym samym mamy rozwiązanie. Można łatwo sprawdzić, że jest to jedyne rozwiązanie.

Pokażemy teraz, jak wygląda to rozwiązanie.

$$A \overset{\text{owr.}}{\vec{X}} = B \quad = \quad X = \cancel{B \cdot A} A^{-1} B$$

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \underline{X &= A^{-1}B} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \cdot A^{-1} \\ & \leftarrow \text{jeśli } X \Rightarrow X = A^{-1}B \\ & A(A^{-1}B) = 1 \cdot B = B \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.1 (Wzory Cramera). Jeśli w równaniu (7.1) macierz A jest kwadratowa i odwracalna, to jedyne rozwiązanie jest postaci $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, gdzie macierz A_{x_i} powstaje poprzez zastąpienie i -tej kolumny A przez $\vec{B}$.

$$\begin{aligned} Z: \quad |A| &\neq 0 \\ |A| &= 0 \\ X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{|A|} \quad \downarrow \text{i-te kol.} \\ & \rightarrow \left(A_{x_1} \quad \cancel{A_{x_2}} = \cancel{X} \Rightarrow \text{nie ma w. row.} \right) \quad A_{x_1} \left(\vec{B} \mid A_i \right) \\ & \quad A_{x_1} \vee A_{x_2} \neq 0 \Rightarrow \text{nie ma row.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{|A_{x_i}|}{|A|} \leftarrow |A_{x_i}| = \begin{vmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & \vec{B} & A_{i+1} & \dots & A_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & \left(\sum_{j=1}^n x_j A_j \right) & A_{i+1} & \dots & A_n \end{vmatrix} \\ &= \sum x_j \begin{vmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & A_j & A_{i+1} & \dots & A_n \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{i-te} \\ \text{i} \neq j \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} A_j \\ \text{i} \neq j \end{matrix} \right\} A_j \\ \underline{B = AX = A \sum x_i E_i} &= \underline{\sum x_i A_i} \quad \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{matrix} \right\} = \sum x_j \cdot \left\{ \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{matrix} \right\} = x_i \cdot |A| \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{x_i}| &= x_i \cdot |A| \\ x_i &= \frac{|A_{x_i}|}{|A|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{x_i}| &\leq n \times n^3 \\ &\rightarrow n^3 \quad n^4 \end{aligned}$$

7.4 Ogólne układy równań liniowych

Chcemy jednak zająć się tym problemem w większej ogólności:

- co jeśli A nie jest odwracalna? Czy wtedy rozwiązań jest wiele, czy może 0?
- co jeśli A nie jest kwadratowa (w szczególności: nieodwracalna)? Czym różnią się przypadki:
 - jest więcej równań, niż zmiennych?
 - jest więcej zmiennych, niż równań?

7.4.1 Układy jednorodne

Zajmijmy się trochę mniej ogólnym problemem: co jeśli $\vec{B} = \vec{0}$? Taki układ nazywamy *jednorodnym*. Jedno rozwiązanie na pewno jest.

Lemat 7.2 (Układ jednorodny). *Zbiór wszystkich rozwiązań równania*

$$A\vec{X} = \vec{0}$$

jest przestrzenią liniową, jest to $\ker(A)$, gdy A traktujemy jako przekształcenie liniowe z $\mathbb{F}^n$ w $\mathbb{F}^m$. Wymiar tej przestrzeni to $n - \text{rk}(A)$.

$A \leftarrow \text{pr. lin.}$

$$A \vec{X} = \vec{0}$$

$\Rightarrow x \in \ker A$

7.4.2 Układy niejednorodne

Fakt 7.3.

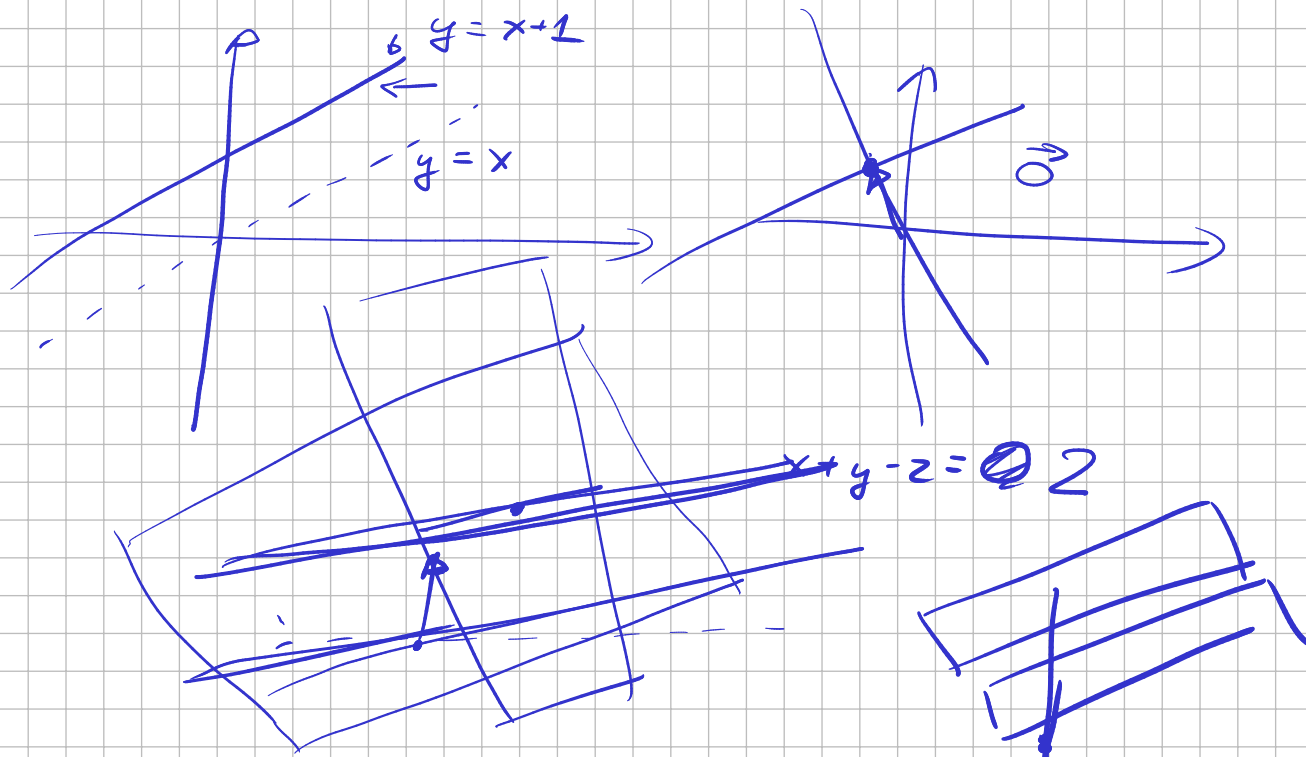
$$A\vec{X} = \vec{B} \text{ ma rozwiązanie} \iff \vec{B} \in \text{Im}(A)$$

$$A \vec{X} = \sum x_i \cdot A_i$$

$\text{Im } A$

- Jeśli równanie $A\vec{X} = \vec{B}$ ma rozwiązanie to zbiór wszystkich jego rozwiązań jest warstwą względem $\ker A$.

$$\exists \vec{X} \quad A\vec{X} = \vec{B}$$



$$AX = B \text{ ma row } X_0 \Rightarrow$$

$$\text{zb. row to } X_0 + \ker A$$

$$\bullet \quad X_1$$

$$AX_1 = B$$

$$AX_0 = B$$

$\Rightarrow$

$$A(\underbrace{X_1 - X_0}_{\uparrow \ker A}) = \vec{0}$$

$$\underbrace{X_1 - X_0}_{\in \ker A} \in \ker A$$

$$\underline{X_1 \in X_0 + \ker A}$$

$\Leftarrow$

$$X_1 \in X_0 + \ker A$$

$$X_1 = X_0 + Y$$

$$AY = \vec{0}$$

$$A(\underbrace{X_1}_{\text{row.}}) = \underbrace{AX_0}_{\vec{B}} + \underbrace{AY}_{\vec{0}} = \vec{B}$$

Uwaga. Jeśli ciało $\mathbb{F}$ jest nieskończone i $\ker A \neq \{\vec{0}\}$, tj. jest więcej niż jedno rozwiązanie, to jest „nieskończenie wiele rozwiązań”. W innym przypadku jest to $|\mathbb{F}|^{\dim \ker A}$.

$$\ker A = \{ \vec{0} \} \quad \text{jedynie}$$

nie musi być rown

jest rown, $|\ker A| > 1$

$$|\ker A|$$

$$|\mathbb{F}| = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}$$

$$\mathbb{C}$$

„niech...”

$$\mathbb{Z}_3$$

$$|\mathbb{Z}_3| = 3$$

$$n - \dim A$$

Fakt 7.4 (Tw. Kronecker-Capelli). Układ

$$A\vec{X} = \vec{B}$$

ma rozwiązanie $\iff \text{rk}(A|\vec{B}) = \text{rk}(A)$. *macierz uł. rów*

Macierz $[A|\vec{B}]$ nazywana jest czasem *macierzą rozszerzoną* układu $A\vec{X} = \vec{B}$.

macierz rozszerzona

• $\exists \text{ row} \iff \text{rk}(A|\vec{B}) = \text{rk}(A)$

$\Uparrow \Downarrow \Uparrow$

$\vec{B} \in \text{Im } A$

$\nwarrow$ jest komb. liniowa wektorów $A_1, \dots, A_n$

$$\text{rk}([A_1 | \dots | A_n]) = \text{rk}([A_1 | \dots | A_n | \vec{B}])$$

Przykład 7.5. Ile rozwiązań, w zależności od parametru λ , ma podany układ równań?

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 1 + \lambda \\ (6 + \lambda^2)x_1 - 3x_2 + (9 - \lambda^2)x_3 = 3 \end{cases}$$

Podany układ równań zapisany w postaci macierzowej wygląda następująco

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ (6 + \lambda^2) & -3 & (9 - \lambda^2) \end{bmatrix}}_M \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \lambda \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|M| \neq 0 \Rightarrow$ jedyne row.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ (6 + \lambda^2) & -3 & (9 - \lambda^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \\ (6 + \lambda^2) & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (9 - \lambda^2) - 6(6 + \lambda^2) + 54 + 5(9 - \lambda^2) - 6$$

...

$$3(\lambda^2 - 1) \neq 0 \quad \lambda \neq 1, \lambda \neq -1$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 2 \\ 6+\lambda^2 & -3 & 9-\lambda^2 & 1+\lambda \\ & & & 3 \end{array}$$

$$\lambda = 1, \lambda = -1$$

A

$A|B$

2

$$\lambda = 1$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

Test row!

$$\text{rk } A = 2$$

$$|\det A| = 3 - 2 = 1$$

$$\lambda = -1$$

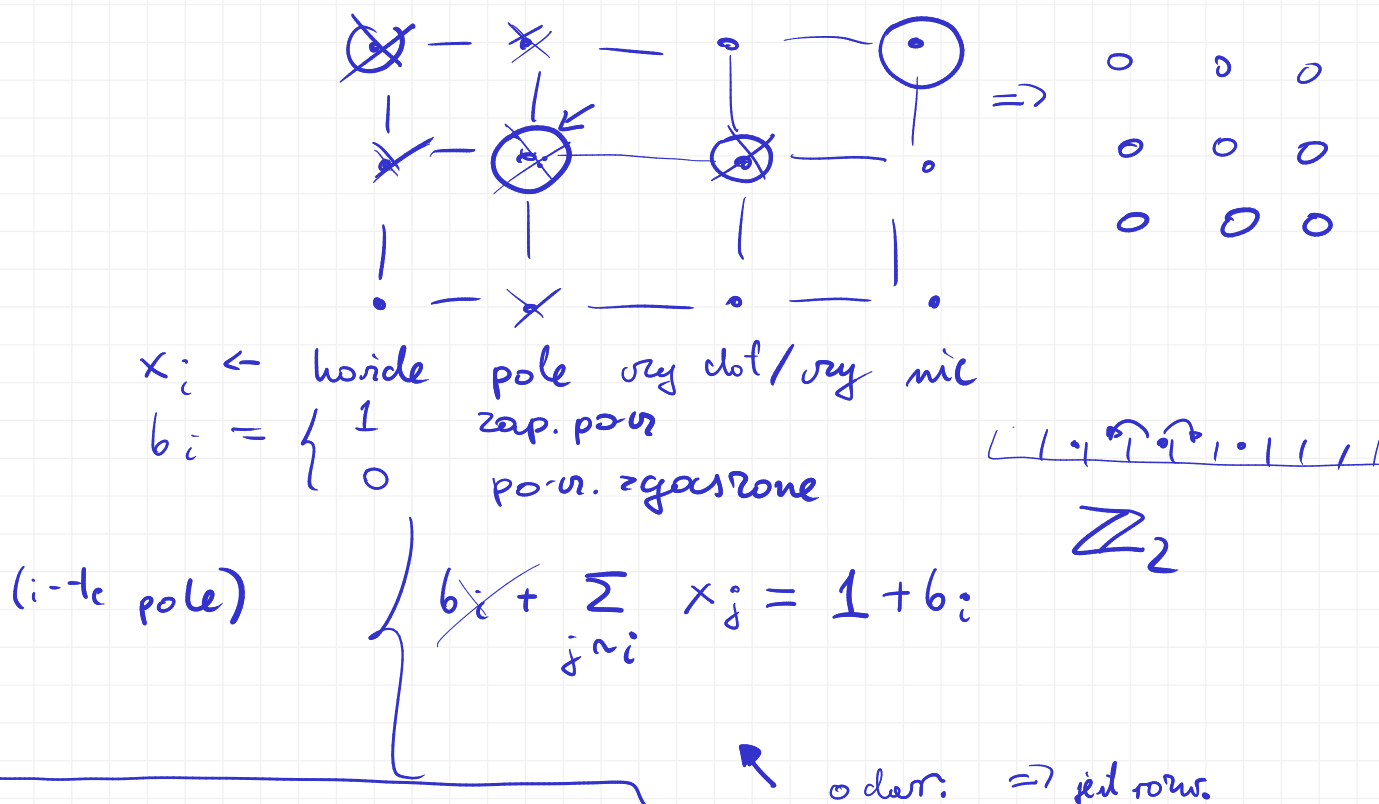
$$\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 0 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$$\text{rk}(A|B) = 3$$

$\Rightarrow$ nie ma row.

Przykład/Zastosowanie 7.6. Rozważmy grę, rozgrywaną na prostokątnej planszy $n \times m$. Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dotknąć konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i wszystkich polach sąsiadujących z nim bokami). Celem gry jest zapalenie wszystkich pól.

Gra taka była kiedyś dostępna jako gra pudełkowa, w której początkowe zapalenia były losowane, zaś zmiany zapaleń odbywały za pomocą okablowania elektrycznego.



7.5 Metoda eliminacji Gaussa

Definicja 7.7 (Układy równoważne). Układy równań $A\vec{X} = \vec{B}$ oraz $A'\vec{X} = \vec{B}'$ są równoważne, jeśli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Uwaga. Zauważmy, że równoważne układy równań muszą mieć tyle samo zmiennych, ale mogą mieć różną liczbę równań.

Jak to policzyć wydajnie?

Lemat 7.8. Rozważmy układ równań $A\vec{X} = \vec{B}$. Układ uzyskany przez następujące operacje przeprowadzone na macierzy rozszerzonej układu:

- zamianę i -tego oraz j -tego równania $\leftarrow$
- dodanie do j -tego równania wielokrotności i -tego $\leftarrow \{ +\lambda \cdot$
- przemnożenie i -tego równania przez stałą $\alpha \neq 0 \leftarrow$
- usunięcie równania $0\vec{X} = 0$ (gdzie lewe 0 to zerowa macierz odpowiedniego rozmiaru, a prawe: liczba)

$$0x \quad 0y \quad \dots = 1$$

dają układ równoważny wyjściowemu.

Prosty dowód pozostawimy jako ćwiczenie.

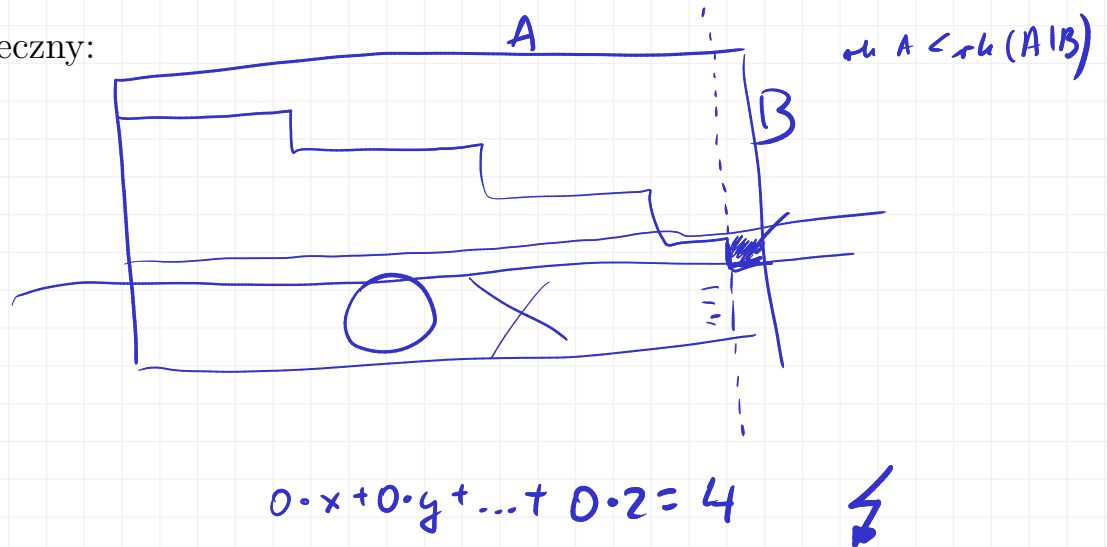
$$\begin{array}{l} x = 2y + 3 \\ \times \quad + (-3) \cdot \\ \hline \quad \quad -2y = -3 \\ 3x + \dots = 7 \end{array}$$

Uwaga. Popularny sposób rozwiązywania równań „przez wstawianie” to odmiana eliminacji Gaußa.

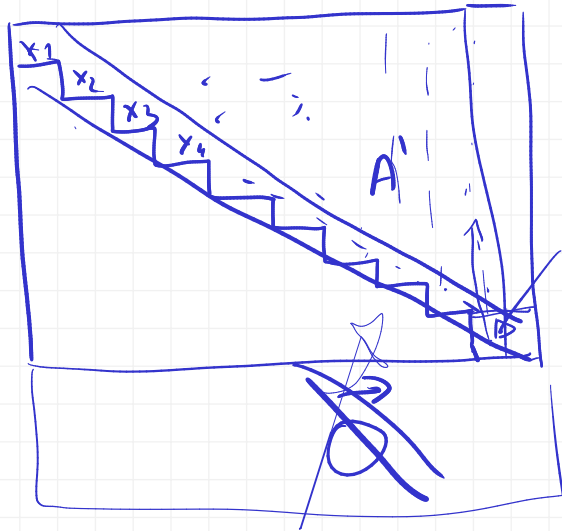
Oznacza to, że możemy stosować metodę eliminacji (wierszowej) na równaniu. Na końcu dostajemy macierz w postaci schodkowej (wierszowo).

Wtedy

- Układ jest sprzeczny:



- Układ ma jedno rozwiązanie:



$$A^b X = B$$

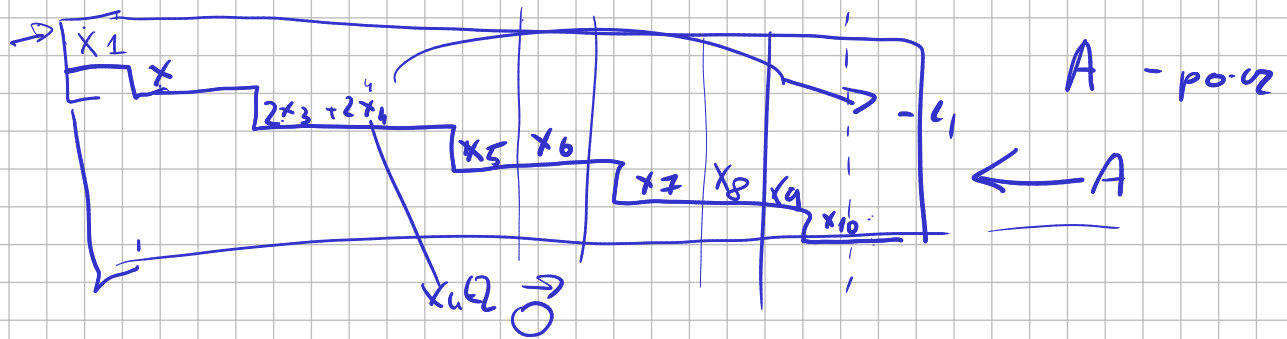
$$A'^b X = B'$$

1 row.

$$\begin{aligned} 3 \cdot x &= 7 \\ z &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$7 \cdot x_i = 3$$

- W przeciwnym przypadku,



- 1) Jakiś row? x_i nie jest zm. wiadoz, $\frac{x_i \leftarrow w_i}{\leftarrow 0}$
- $x_1 \ x_3 \ x_5 \dots x_7 \ x_9$ $\leftarrow$ lewobrotowa i odwr.
- $\rightarrow$ row. x_0 $x_i \leftarrow w_i$
- lar $\textcircled{A}$
- $x_0 + \text{lar } A$

Przykład 7.9 (Kontynuacja Przykładu 7.5). Przypomnijmy, że chcemy sprawdzić, ile rozwiązań, w zależności od parametru λ , ma układ:

$$\rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 1 + \lambda \\ (6 + \lambda^2)x_1 - 3x_2 + (9 - \lambda^2)x_3 = \frac{1 + \lambda}{3} \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \lambda \in \{-1, 1\} \quad 1 \\ \lambda = 1 \quad \dim \ker A = 1 \\ \lambda = -1 \quad 0 \text{ rows.} \end{array}$$

Użyjemy tym razem eliminacji Gaussa:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \lambda \\ (1 + \lambda^2)x_1 - x_2 + (3 - \lambda^2)x_3 = 2 - \lambda \end{array} \right.$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = \lambda$$

$$\frac{(\lambda^2 - 1)x_1}{\text{"0"} x_1} + \frac{(1 - \lambda^2)x_3}{\text{"-"} x_3 \text{"0"}} = \frac{2(1 - \lambda)}{1} \quad / : \lambda^2 - 1$$

1) $\lambda = 1$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 + 4x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$\ker A$

$$\begin{array}{l} x_3 \leq 0 \\ x_1 = 0 \\ -x_2 = 1 \quad x_2 = -1 \end{array}$$

2) $\lambda = -1$

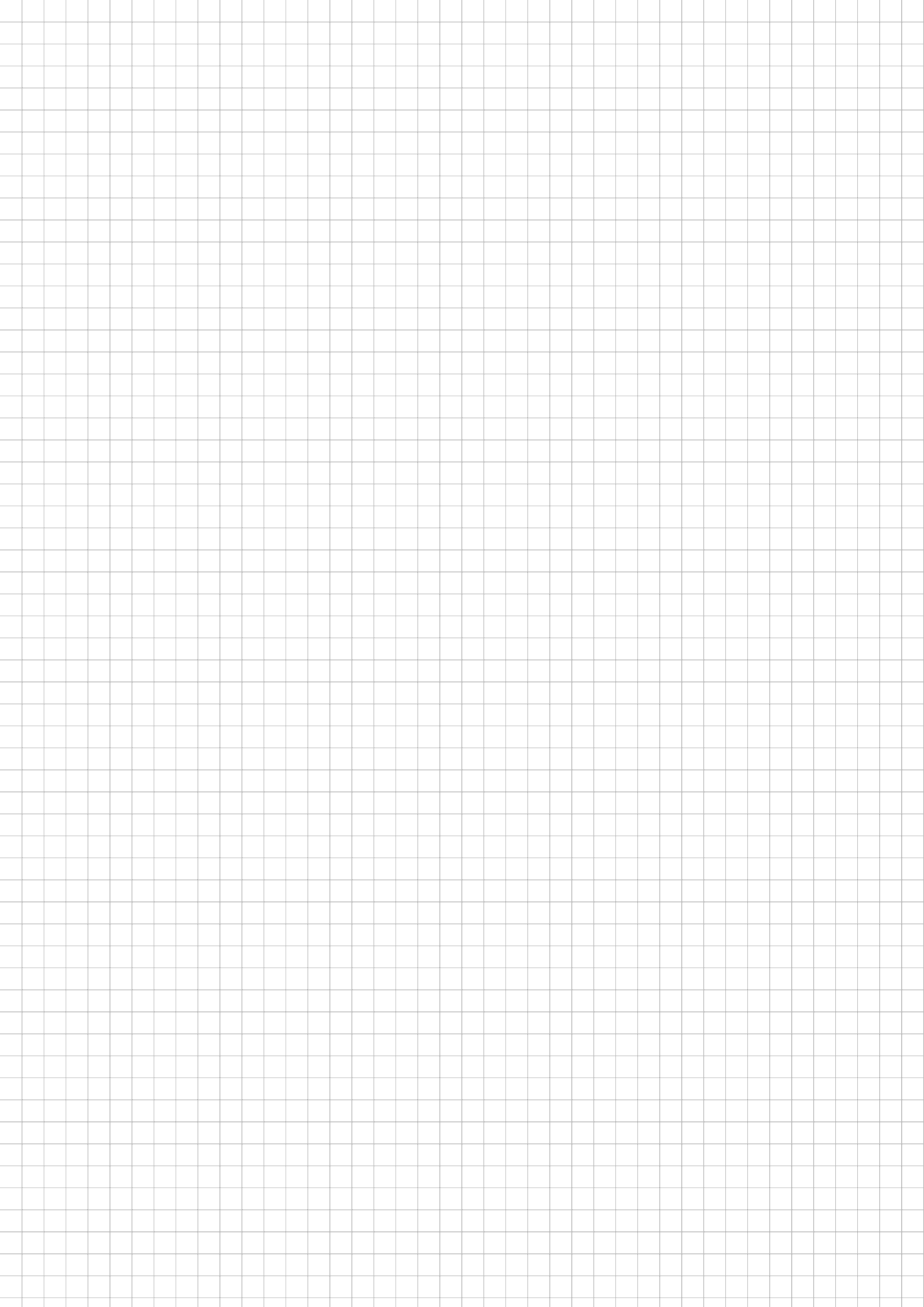
$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 4 \end{array}}$$

0 rows.

3) $\lambda \notin \{1, -1\}$

$$\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \leftarrow -3 \cdot \text{III} \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \lambda \leftarrow -2 \cdot \text{III} - \text{I} \\ \rightarrow 1x_1 \quad -x_3 = 2/(\lambda^2 - 1) \end{array}$$



Rozdział 8

Wartości własne

V $n \times n$

$$A \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$$(M \vec{v}) = \vec{v}$$

$$T: V \rightarrow V$$

$$T \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$M := M_{BB}(T)$$

λ jest wartością $T \Leftrightarrow$ wartość M

v jest wektorem $T \Leftrightarrow$ wektor M

$$M \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

wartość M

wektor M dla
wartość λ

Wartość własna?

Wektor własny?

8.1 Wartość własna, wektor własny

Definicja 8.1 (Wartość własna, wektor własny). λ jest *wartością własną* macierzy M (dla wektora $\vec{V} \neq 0$), gdy $M\vec{V} = \lambda\vec{V}$. $\vec{V}$ jest *wektorem własnym* tej macierzy.

λ jest *wartością własną* przekształcenia liniowego F , jeśli $F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ dla pewnego $\vec{v} \neq \vec{0}$. Taki wektor $\vec{v}$ jest *wektorem własnym* F (dla wartości własnej λ).

Fakt 8.2. λ jest *wartością własną* przekształcenia F wtedy i tylko wtedy gdy λ jest *wartością własną* $M_{BB}(F)$, dla dowolnej bazy B .

$\vec{v}$ jest *wektorem własnym* F dla wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\vec{v}]_B$ jest *wektorem własnym* macierzy $M_{BB}(F)$ dla wartości własnej λ , dla dowolnej bazy B .