

Rozdział 8

Wartości własne

$M \leftarrow$ kwadratowa

$\vec{V} \neq \vec{0}$

$M \vec{V} = \lambda \vec{V}$

λ wart

$\vec{V}$ odp. wekt. wł.

$\mathbb{C}$

$F : V \rightarrow V$

$\vec{v} \neq \vec{0}$

$F \vec{v} = \lambda \vec{v}$

8.1 Wartość własna, wektor własny

Definicja 8.1 (Wartość własna, wektor własny). λ jest wartością własną macierzy M (dla wektora $\vec{V} \neq \vec{0}$), gdy $M\vec{V} = \lambda\vec{V}$. $\vec{V}$ jest wektorem własnym tej macierzy.

λ jest wartością własną przekształcenia liniowego F , jeśli $F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ dla pewnego $\vec{v} \neq \vec{0}$. Taki wektor $\vec{v}$ jest wektorem własnym F (dla wartości własnej λ).

Fakt 8.2. λ jest wartością własną przekształcenia F wtedy i tylko wtedy gdy λ jest wartością własną $M_{BB}(F)$, dla dowolnej bazy B .

$\vec{v}$ jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\vec{v}]_B$ jest wektorem własnym macierzy $M_{BB}(F)$ dla wartości własnej λ , dla dowolnej bazy B .

F

$\updownarrow$

$M_{BB}(F)$

λ

$\vec{v}$

$\updownarrow$

λ

$(\vec{v})_B$

$\exists \vec{v} \neq \vec{0}$

$F \vec{v} = \lambda \vec{v}$

$B \leftarrow$ baza

$$F \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$\stackrel{B}{\Rightarrow}$$

$$\lambda \in \text{wert wt } M_{BB}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{(F \vec{v})}_B \\ & \quad \parallel \\ & \quad (\lambda \vec{v})_B \\ & \quad \lambda \underbrace{(\vec{v})}_B \end{aligned}$$

$$\stackrel{B}{\Rightarrow} M_{BB}(F)(\vec{v})_B$$

Przykład 8.3. Przypomnijmy Przykład 5.11 i macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wart. wł.}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wart. wł.}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wektor wł. 6}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad M = N^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot N \quad M_{EB}$$

$$F = F_M \quad F(\vec{v}) = M \cdot \vec{v}$$

$$M_{BB}(F) = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

Wartości własne nie zawsze istnieją.

Przykład 8.4. Obrót $\mathbb{R}^2$ o kąt 90° (w lewo). Jego macierz wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$-y = \lambda x$$

$$\lambda x = x y$$

$$-y = \lambda^2 y$$

$$y \neq 0 \rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Geometrycznie „widać”, że przekształcenie to nie ma wektorów własnych, czyli nie ma też ich jego macierz.

Z drugiej strony, jeśli potraktujemy ją jako macierz nad $\mathbb{C}$, to wtedy

$$\lambda = i \quad \lambda = -i$$

$$-y = \lambda x$$

$$x = \lambda y$$

$$x y = -i x$$

$$x = i y$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$x y = i x$$

$$x = -i y$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

8.2 Macierze podobne

Podobna

$$M \sim M' \Leftrightarrow \exists N$$

$$M \rightarrow F_M \Rightarrow M_{BB}(F_M) \\ \parallel \\ \underline{N^{-1} M N}$$

$$M' = N^{-1} M N$$

Definicja 8.5 (Macierze podobne). Macierze kwadratowe M , M' są podobne, jeśli istnieje macierz odwracalna A , taka że

$$M' = A^{-1} M A.$$

Oznaczamy to jako $M \sim M'$.

macierz zm. bazy

Lemat 8.6. Rozpatrzmy macierz odwracalną $A = [A_1 | A_2 | \dots | A_n]$. Jest to macierz zmiany bazy między bazą $B = \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$ oraz bazą standardową E :

$$A = M_{BE}.$$

$$A^{-1} = M_{BE}^{-1} = M_{EB}$$

W szczególności, dla macierzy kwadratowej M oraz jej macierzy podobnej $M' = A^{-1} M A$ mamy

$$M' = M_{EB} M_{EE}(F_M) M_{BE}.$$

Oznacza to, że dla przekształcenia liniowego F_M indukowanego przez M macierz M' jest macierzą tego przekształcenia w bazie B .

$$M' = M_{EB}(M_{EE}(F_M))M_{BE} = M_{BB}(F_M).$$

Fakt 8.7. Macierze podobne mają te same wartości własne.

i odp. wektory

$$M \sim M' = A^{-1} M A$$

$$M \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$M' (\overbrace{A^{-1} \vec{v}}^{\vec{w}}) = \lambda \vec{w}$$

$$A^{-1} M A A^{-1} \vec{v} = A^{-1} \underbrace{M \vec{v}}_{\lambda \vec{v}} = \lambda (A^{-1} \vec{v})$$

$M \sim M'$ rel. rów $M \sim M'$ $M' \sim M$

$$M' = A M A^{-1}$$

$$M = A^{-1} M' A$$

$$M \sim M' \sim M''$$

$$M' = A^{-1} M A$$

$$M'' = B^{-1} M' B$$

$$M'' = B^{-1} A^{-1} M A B$$

8.3 Wielomian charakterystyczny

Lemat 8.8. λ jest wartością własną macierzy $M \iff \det(M - \lambda \text{Id}) = 0$

$\uparrow$ ustalony

$$M \vec{x} = \lambda \vec{x} \rightarrow \text{rów.}$$

~~nie liniowe!~~

$$\lambda - \text{wart } M \iff \exists \vec{v} \neq \vec{0} \quad M \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$\iff \exists \vec{v} \neq \vec{0} \quad M \vec{v} - \lambda \text{Id} \vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \exists \vec{v} \neq \vec{0} \quad (M - \lambda \text{Id}) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \exists \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{v} \in \ker(M - \lambda \text{Id})$$

$$\iff \ker(M - \lambda \text{Id}) \neq \{\vec{0}\}$$

$$\iff M - \lambda \text{Id} \text{ nie jest odwracalna}$$

$$\iff \det(M - \lambda \text{Id}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

4, 6

Definicja 8.9 (Wielomian charakterystyczny). Wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej to:

$$\varphi_M(x) = \det(A - x \text{Id})$$

Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego $F : V \rightarrow V$ to

$$\varphi_F(x) = \det(M_{BB}(F) - x \text{Id}) ,$$

dla dowolnej bazy B przestrzeni V .

Lemat 8.10. Wielomian charakterystyczny dla macierzy $n \times n$ jest wielomianem stopnia n .

λ jest wartością własną macierzy M wtedy i tylko wtedy gdy jest pierwiastkiem φ_M .

$$\varphi_M(x) = \det(M - x \text{Id})$$

$\lambda \leftarrow \text{pierw}$

$$\det(M - \lambda \text{Id}) = 0$$

$M - \text{Id}$

$\leftarrow$ wielomian st n .

$$\det(M - x \text{Id})$$

przez indukcję

$$n=1 \quad \text{same} \quad a-x$$

$$n=2 \quad \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc$$

Indukcja: rown. Laplace'a

• Macierz, +. że w kaidy kol. i w kaidym wierszu

≤ 1 el. zależy od x

$$\Rightarrow \det(N_x) \leftarrow \text{wiel st} \leq n$$

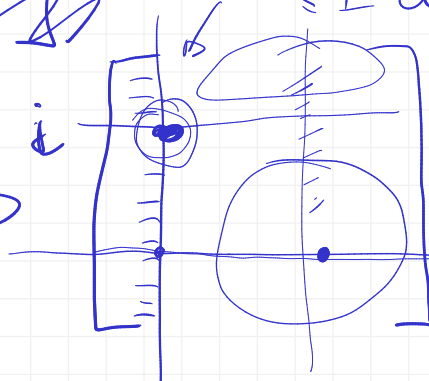
$$\text{jeśli } \det(N_x) \leftarrow \text{st } n \Rightarrow (*)$$

w kaidy kol. i kaidym wierszu
dokładnie 1. el. zależy od x

$$n=1, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

nieprawda
(*)

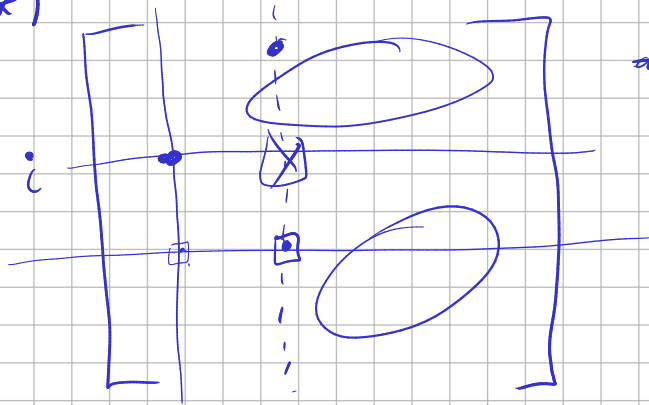


≤ 1 el. zależy od x

$$\sum (a_{i1}) \cdot (-1)^{i+1} |A_{i1}|$$

nieprawda (*)
wiel. st $\leq n-2$

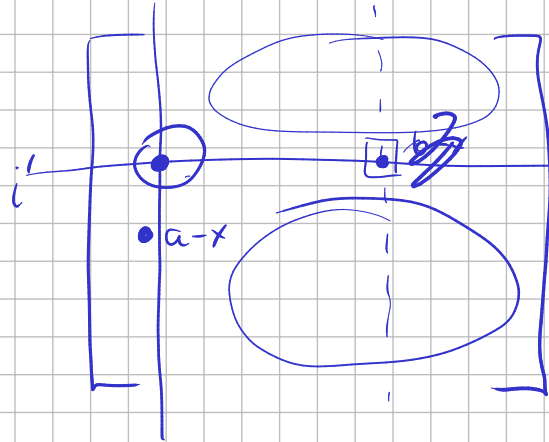
(*)



$$a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot A_{i,j}$$

$\xrightarrow{a-x}$
 $\xrightarrow{(*)}$

wicl. st $n-1$
 wicl. st n



$$a \cdot A_{i,j} \cdot (-1)^{i+j}$$

$\xrightarrow{\text{wicl. st } (*)}$
 $\xrightarrow{\text{wicl. st } \leq n-1}$

Uwaga: $\det(M - xI)$

row. Laplace'a

2×2
 3×3

Lemat 8.11. Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego jest dobrze zdefiniowany.

$$\chi_F(x) = \det(M_{BB}(F) - xId) \leftarrow \text{wielomian}$$

$M_{BB}(F - xId)$ $B?$

To nie zależy od B

$$\det(M_{BB}(F) - xId) = \det(M_{B'B'}(F) - xId)$$

$$\begin{aligned} & \det(M_{B'B'}(M_{BB}(F) - xId)M_{BB'}) \\ &= \det(M_{B'B'}M_{BB}(F)M_{BB'} - M_{B'B'}(xId)M_{BB'}) \\ &= \det(M_{BB}(F) - xId) \end{aligned}$$

Przykład 8.12 (Kontynuacja Przykładu 8.4). Przypomnijmy, że obrót $\mathbb{R}^2$ o kąt 90° (w lewo) ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - xId$$

$$\begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm i$$

Przykład 8.13 (Kontynuacja Przykładu 8.3). Obliczmy wartości własne macierzy

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} 4-x & 0 & 0 & & & \\ -1 & 5-x & 1 & & & \\ -1 & 1 & 5-x & & & \end{array} \right| \\
 &= (4-x) \begin{vmatrix} 5-x & 1 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix} = (4-x) \left((5-x)^2 - 1 \right) \\
 &= (4-x) (4-x) (6-x) \\
 & \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 4 & 6 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

8.4 Krotności: algebraiczna i geometryczna.

Lemat 8.14. Jeśli λ jest wartością własną dla M , to zbiór wektorów własnych (wraz z wektorem $\vec{0}$) dla M to $\ker(M - \lambda \text{Id})$. W szczególności jest to przestrzeń liniowa.

Uwaga. Formalnie wektor $\vec{0}$ nie jest wektorem własnym, ale wygodniej jest go zaliczyć tu do wektorów własnych, żeby wyszła podprzestrzeń.

$$\begin{aligned}
 & \vec{v} \in \text{wekt. wł. dla } \lambda \Leftrightarrow M\vec{v} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \\
 & M\vec{v} - \lambda \text{Id} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \\
 & (M - \lambda \text{Id}) \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \\
 & \vec{v} \in \ker(M - \lambda \text{Id})
 \end{aligned}$$

lub $\vec{v} = \vec{0}$

Oznaczenie: dla ustalonej macierzy M oznaczamy

$$\mathbb{V}_\lambda = \{\vec{v} : M\vec{v} = \lambda \vec{v}\}.$$

Analogicznie dla przekształceń liniowych.

Tym samym, aby obliczyć wektory własne należy najpierw policzyć wielomian charakterystyczny, jego pierwiastki i dla ustalonego pierwiastka λ policzyć $\ker(M - \lambda \text{Id})$. Można też oczywiście bezpośrednio próbować rozwiązać równanie

$$M\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

w zmiennych $x_1, \dots, x_n$.

$$\dim(\mathbb{V}_\lambda) \leq \text{kr. geometryczna}$$

Definicja 8.15 (Krotność algebraiczna, krotność geometryczna). Dla wartości własnej λ *krotność geometryczna* to wymiar przestrzeni wektorów własnych dla λ , zaś *krotność algebraiczna* to krotność pierwiastka λ w wielomianie charakterystycznym.

Fakt 8.16. Krotność geometryczna λ dla M to wymiar $\ker(M - \lambda \text{Id})$.

Lemat 8.17. Jeśli $A \sim B$ to krotność geometryczna λ dla A, B jest taka sama. Analogicznie krotność algebraiczna.

Lemat 8.18. Krotność algebraiczna jest większa równa krotności geometrycznej.

* $M \leftarrow$ matrix $\lambda \leftarrow$ wert. wtl.

kolmo'si geom k
 $B \leftarrow \underbrace{\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k}_{\text{niez. wtl. } \lambda}, \underbrace{\vec{V}_{k+1}, \dots, \vec{V}_n}_{\text{niez. wtl. } \lambda}$

$F := F_M$
 $M \sim M_{BB} (F)$
 ma te same wr. geom. wtl.
 wr. alg.

$$M' = \begin{bmatrix} (M \vec{V}_1)_B & (M \vec{V}_2)_B & \dots & (M \vec{V}_k)_B & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\vec{\lambda V}_1 \\ \lambda \vec{E}_1}} & \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\vec{\lambda V}_2 \\ \lambda \vec{E}_2}} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\vec{\lambda V}_k \\ \lambda \vec{E}_k}} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos} \\ \vdots \\ \text{cos} \end{bmatrix}$$

kolmo'si geom $\lambda \leq k$
 $\Rightarrow$ kolmo'si alg $\geq k$

$\det (M' - x I)$

$$\begin{bmatrix} \lambda - x & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda - x & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos} \\ \vdots \\ \text{cos} \end{bmatrix}$$

now. Lapl.
 $(\lambda - x)^k \cdot |A - x I|_{n-k}$
 λ - wr. kolmo'si
 pierw. wtl.

Uwaga. Jeśli krotność algebraiczna wynosi 1, to geometryczna też wynosi 1:

$$\begin{aligned} & |M - \lambda Id| \\ & |M - \lambda Id| = 0 \Rightarrow \lambda - \text{wart. wł.} \Rightarrow \begin{matrix} \text{kr. alg.} = 1 \\ \text{kr. geom.} \geq 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

- krotność geometryczna wynosi najwyżej 1 (bo jest $\leq$ niż krotność algebraiczna)
- krotność geometryczna wynosi przynajmniej 1, bo $\det(M - \lambda Id) = 0$, czyli λ jest wartością własną.

Przykład 8.19. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\leftarrow \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)(2-x)$

$V_1 = \ker(M - 1Id)$ $V_2 = \ker(M - 2Id)$

$\begin{matrix} \nearrow \\ \text{"1"} \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\nearrow_{\text{rk}} 2 \Rightarrow \ker(M - 1Id) = 1$

$\begin{matrix} \nearrow \\ \text{rk} \\ \text{dim} \end{matrix}$ $\ker(M - 2Id) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \ker(M - 2Id) = 1$ $\text{kr. geom. } 1$

$\begin{matrix} 1 & \text{kr. (alg.) } 1 \\ 2 & \text{kr. alg. } 2 \end{matrix}$

Przykład 8.20. Przypomnijmy Przykład 5.11 i macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ -1 & 5-x & 1 \\ -1 & 1 & 5-x \end{vmatrix} = (4-x) \begin{vmatrix} 5-x & 1 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix} = (4-x)(4-x)(6-x)$$

$$6 \text{ kr. geom } 1 \leq 6 \quad \begin{matrix} \swarrow & \text{kr. alg } 2 \\ \searrow & \text{kr. alg } 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \text{rk } M - 4 | d \quad 1$$

dimker $(M - L_1 | d) = 2$
 kr. geometrische $k: 2$

$$W_\lambda$$

$$v \in W_\lambda$$

$$\begin{aligned} F: W &\rightarrow W \\ F(W_\lambda) &\subseteq W_\lambda \\ F\vec{v} &= \lambda \vec{v} \in W_\lambda \end{aligned}$$

Definicja 8.21 (Przestrzeń niezmiennicza). Podprzestrzeń $V' \leq V$ przestrzeni liniowej V jest *przestrzenią niezmienniczą* dla $F : V \rightarrow V$, jeśli $F(V') \subseteq V'$.

8.5 Macierze diagonalizowalne, przekształcenia diagonalne

Definicja 8.22 (Macierz diagonalizowalna). Macierz M jest *diagonalizowalna* $\iff$ jest podobna do macierz przekątniowej.

Przekształcenie liniowe jest *diagonalne*, jeśli jego macierz (w jakiejś bazie) jest diagonalizowalna.

Lemat 8.23. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy M . Wtedy suma (mnogościowa) baz przestrzeni $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 8.24. Następujące warunki są równoważne dla macierzy kwadratowej M rozmiaru $n \times n$:

1. M jest diagonalizowalna
2. M ma n niezależnych wektorów własnych
3. Suma wymiarów przestrzeni wartości własnych V_{λ} macierzy M wynosi n .

Analogiczne twierdzenie zachodzi też dla przekształceń liniowych.

1 $\Rightarrow$ 2

$$M \sim D \quad A D A^{-1} \quad E_1, E_2, \dots, E_n$$

$$M(A E_i) = \underbrace{A D A^{-1}}_M A E_i = A(\lambda_i E_i) = \lambda_i (A E_i)$$

hol A $A E_1, \dots, A E_n$ liniowo niezależne

2 $\Rightarrow$ 3

n niezer. wekt. wł. $V_1, V_2, \dots, V_n$

$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots$

$\lambda_1 \quad \lambda_2$

$$\dim(V_{\lambda_i}) \geq d_i$$

$$\sum \dim(V_{\lambda_i}) \geq \sum d_i = n$$

$$\sum \dim(V_{\lambda_i}) \leq n$$

$$(n)$$

3) $\Rightarrow$ 1

$$\sum \dim(V_{\lambda_i}) = n$$

$$\dim V_{\lambda_i} = d_i \quad V_1^i, \dots, V_{d_i}^i \leftarrow \text{lin. niez.}$$

3 $\Rightarrow$ 2

$$V_1^1, V_2^1, \dots \leftarrow \begin{matrix} 2 \text{ liniowa} \\ \text{liniowo niez.} \end{matrix}$$

$\uparrow$
n liniowo niez. wekt. w M

2) $\Rightarrow$ 1)

n niez. wekt. w M
 $\Rightarrow M$ diagonalizowalna

$$M = M_{EE}(P) = M_{BE} M_{BB}(F_M) M_{EB}$$

$\swarrow$
odwrócone

$$M \sim D$$

$$M_{BB}(F_M) = \begin{matrix} V_1, \dots, V_n & B \\ D & \\ \text{"} & \end{matrix} \quad F_M V_i = \lambda_i V_i$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$M = N D N^{-1} \quad M \sim D$$

M -diagonalizowalna

8.6 Macierz Jordana

Zajmiemy się obecnie problemem, jak bardzo macierz może nie być diagonalizowalna i jak bardzo mogą się różnić krotności geometryczna i algebraiczna. Zauważmy, że w przypadku liczb zespolonych każdy wielomian ma pierwiastek, w szczególności wielomian charakterystyczny każdej macierzy ma pierwiastek, czyli każda macierz zespolona ma wektor własny.

Definicja 8.25 (Klatka Jordana, macierz Jordana). *Klatką Jordana* nazywamy macierz postaci

$$E_1 = \begin{bmatrix} \lambda - x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - x & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Klatka Jordana
"nie diag." jak się da

Macierzą Jordana nazywamy macierz postaci

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

gdzie $J_1, J_2, \dots, J_k$ są klatkami Jordana.

Ważne $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. może być liczbą zespoloną.

Fakt 8.26. *Klatka Jordana J rozmiaru $k \times k$ ma jedną wartość własną: λ , o krotności algebraicznej k oraz geometrycznej 1.*

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie. Jest to w pewnym sensie najgorszy przypadek, jeśli chodzi o wartości własne.

Twierdzenie 8.27 (Rozkład Jordana). *Każdą macierz M o wartościach w $\mathbb{C}$ można przedstawić w postaci*

$$M = A^{-1} J A$$

gdzie J jest macierzą Jordana a A jest macierzą odwracalną (o wartościach w $\mathbb{C}$).

Uwaga: różne klatki mogą być dla tej samej wartości λ .

Przykład/Zastosowanie 8.28. Przypomnijmy sobie macierz odpowiadającą rekurencji na liczby Fibonacciego.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+1} + f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{bmatrix}$$

$a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{n+i}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix}$$

wiel. char

$$\begin{vmatrix} 0-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x) - 1$$

$$= x^2 - x - 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{5} + 1}{2}$$

x_0, x_1

C_0, C_1

$$[C_0 | C_1] \overset{K}{M} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_0^k & 0 \\ 0 & x_1^k \end{bmatrix} A \leftarrow [C_0 | C_1]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} f_{n-2} & f_n \\ f_n & f_{n+2} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_0^k & \\ & x_1^k \end{bmatrix} A$$

$$C \begin{cases} \vec{C}_0 \\ \vec{C}_1 \end{cases} \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix}$$

$$\alpha \cdot x_0^k + \beta \cdot x_1^k$$

$$M = M_{EE}(F_M)$$

$$M_{CC}(F_M) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$M_{CE} M_{CC}(F_M) M_{EC}$$

$$\begin{bmatrix} C_0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & C_1 \end{bmatrix}^{-1}$$

To się uogólnia?

Rel. liniowa $\Rightarrow$ macierz $(\mathbb{C})$

$$M^k = (A M_J A^{-1})^k = A \underbrace{M_J^k}_{\sim} A^{-1} M_J A^{-1}$$

Zauważmy też, że A oraz A^{-1} można łatwo policzyć:

$$M_J^k = \begin{bmatrix} \boxed{}^k & & & \\ & \boxed{}^k & & \\ & & \boxed{}^k & \\ & & & \boxed{}^k \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ ogólna postać rel. liniowej
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k$
 $x^2 - 2x + 1$
 $(x-1)^2$
 λ k-br. $\lambda^n, n \cdot \lambda^{n-1}, n^2 \cdot \lambda^{n-2}, \dots, n^{k-1} \lambda$

Używając macierzy Jordana możemy podać rozwiązanie ogólne dla każdej zależności tej postaci (tzn. rekurencji liniowej).

8.7 Macierze symetryczne

Definicja 8.29 (Macierz symetryczna). Macierz jest *symetryczna*, jeśli $M = M^T$.

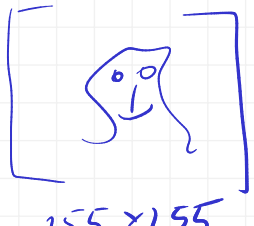
$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \quad M^T = M$$

Twierdzenie 8.30. Macierz symetryczna z $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ma n niezależnych wektorów własnych (nad $\mathbb{R}$).

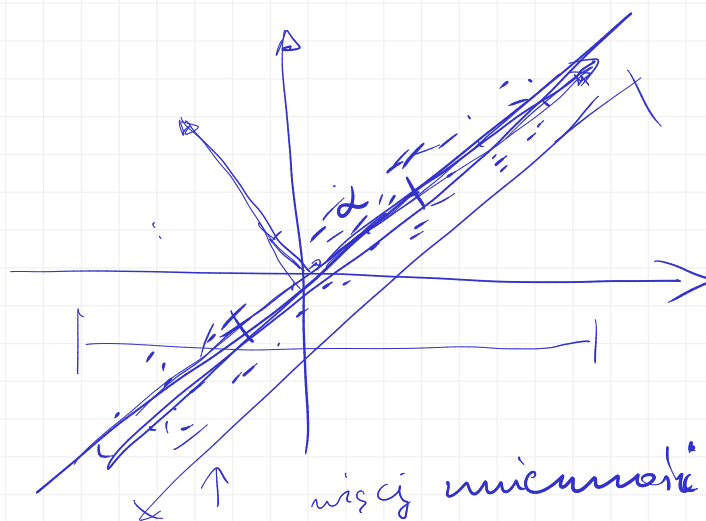
diagonalizowalna

8.8 Eigenfaces raz jeszcze, PCA

Wracamy do omawianego już problemu algorytmu Eigenfaces z Przykładu 2.19.

 155×155 ← wektor i skalarny innej bazy
dużo zdjąć $v_1 \dots v_n$ 

Tak?



nie są niezależne

M

$\vec{V}^T$ (dł. 1)

$M \vec{V} \leftarrow$ rzuty na $\vec{V}$

$\vec{V}^T = \alpha$

$\sum \alpha^2 \leftarrow$ ilość mag'r.

$(M \vec{V})^T (M \vec{V}^T)$ 

$V(M^T M)V^T$

macierz sym.

n niezależnych wekt. wł.

max V

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\begin{aligned} & \textcircled{M^T M} \leftarrow v_1, \dots, v_m \\ & (M^T M)^T = M^T (M^T)^T \end{aligned}$$

Rozdział 9

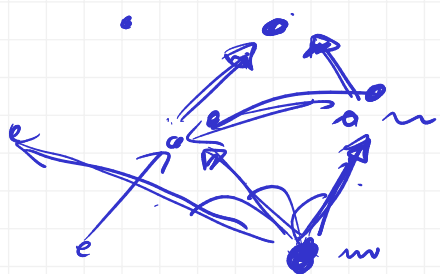
PageRank

Oryginalny alg. Google'a

Na podstawie pracy Kurt Bryan i Tanya Leise „The \$25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind Google.” *SIAM Review*, 48:3 (2006) 569–581.

9.1 Macierze sąsiedztwa, ranking

Modelujemy internet jako graf: zbiór wierzchołków to strony, (skierowane) krawędzie to linki między nimi (krawędź z i do j oznacza, że jest link ze strony i do j). Naszym celem jest skonstruowanie rankingu, tj. przypisanie każdej stronie jej „ważności” w sieci. Chcemy to robić na podstawie linków, każdemu przypisujemy sumę głosów 1. Zakładamy, że graf nie ma „pętli”, tzn. krawędzi z i do i .



„ranking”

Macierz sąsiedztwa

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow j \sim i$$

$$\frac{a_{ij}}{\deg(j)}$$

$$r_i = \sum_j a_{ij} r_j$$

$M \leftarrow$ znormalizowana macierz sąsiedztwa

$$R = M \cdot R \quad (\text{znormalizowany do } 1)$$

- zaczynamy w dowolnym miejscu
- idę losowo

- istnieje
- ≥ 0
- jedyne