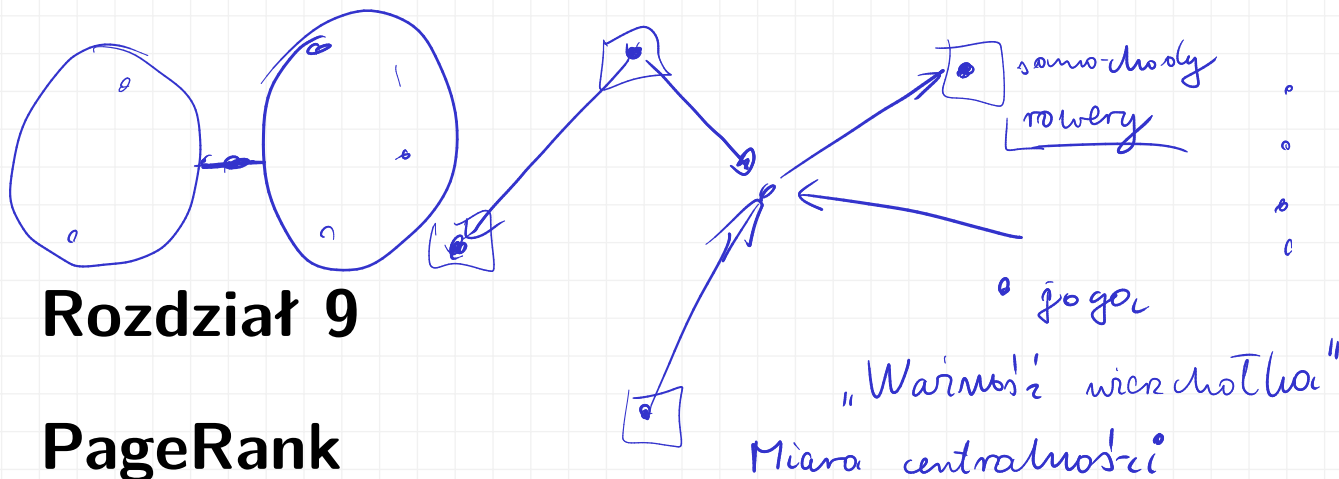




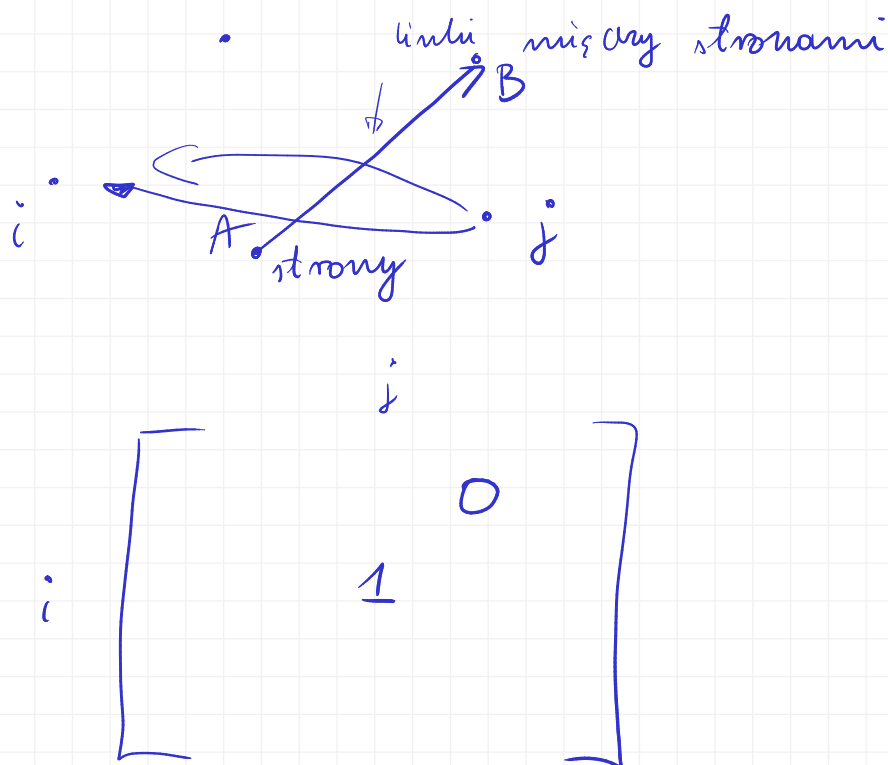
Rozdział 9

PageRank

Na podstawie pracy Kurt Bryan i Tanya Leise „The \$25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind Google.” *SIAM Review*, 48:3 (2006) 569–581.

9.1 Macierze sąsiedztwa, ranking

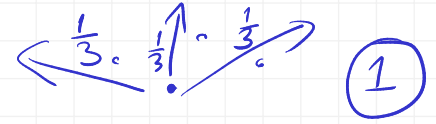
Modelujemy internet jako graf: zbiór wierzchołków to strony, (skierowane) krawędzie to linki między nimi (krawędź z i do j oznacza, że jest link ze strony i do j). Naszym celem jest skonstruowanie rankingu, tj. przypisanie każdej stronie jej „ważności” w sieci. Chcemy to robić na podstawie linków, każdemu przypisujemy sumę głosów 1. Zakładamy, że graf nie ma „pętli”, tzn. krawędzi z i do i .



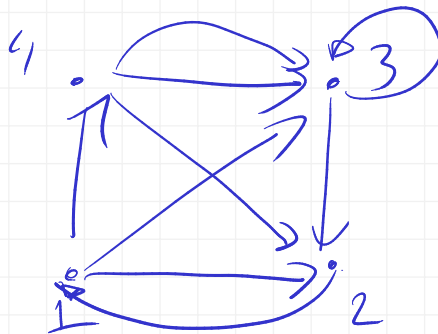
Definicja 9.1 (Znormalizowana macierz sąsiedztwa). Dla grafu G o wierzchołkach $1, 2, \dots, n$ niech $d_{i,j}$ oznacza liczbę krawędzi z j do i (może to być 0), zaś m_j liczbę krawędzi wychodzących z j ($= \sum_i d_{i,j}$).

Znormalizowana macierz sąsiedztwa $M(G)$ to macierz $(m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, gdzie

$m_j \leftarrow$ stopień wych. j
(linba hr. wych.)



$$m_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{m_j}.$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ 3 & 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ 4 & 1/3 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$\sum 1$



"wierz. wierz."

Nie ma wierz. wierz. $\Rightarrow$



zm. macierz 102
jest stochastyczna

Definicja 9.2 (Macierz stochastyczna, wektor stochastyczny). Wektor jest *stochastyczny*, jeśli jego współrzędne są nieujemne i sumują się do 1.

≥ 0

Macierz kwadratowa M jest (kolumnowo) *stochastyczna*, jeśli każda jej kolumna jest wektorem stochastycznym.



Fakt 9.3. Iloczyn dwóch macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną.

Jeśli $M_1, \dots, M_k$ są macierzami stochastycznymi oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$, to

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i M_i$$

też jest macierzą stochastyczną.

Prosty dowód pozostawiamy na ćwiczenia.

$$\begin{matrix} M & M' & M'' \\ & M \cdot M' & \\ \frac{1}{2}M + \frac{1}{3}M' + \frac{1}{6}M'' & & \end{matrix}$$

$$\tau_i = \sum_j m_{ij} \tau_j$$



Potęgi znormalizowanej macierzy sąsiedztwa mają naturalną interpretację: wyraz i, j macierzy M^k jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka długości k w grafie sąsiedztwa z j do i . To stwierdzenie ma dokładniejszą, ilościową wersję:

Lemat 9.4. Niech M będzie znormalizowaną macierzą sąsiedztwa zaś $\vec{V}$ wektorem stochastycznym. Wtedy $M^k \vec{V}$ to rozkład prawdopodobieństwa procesu losowego:

krok 0 W kroku 0 losujemy wierzchołek początkowy wg. rozkładu wyznaczonego przez $\vec{V}$, tj. wierzchołek i jest wylosowany z prawdopodobieństwem v_i .

krok k W każdym kolejnym kroku, jeśli jesteśmy w wierzchołku v , wybieramy z takim samym prawdopodobieństwem jedną z krawędzi wychodzących z v .

• Indukcja



• $k=0$

$$\text{gdy } M^0 \cdot \vec{V} = \text{Id} \vec{V} = \vec{V}$$

$$M^{k+1} \vec{V} = \begin{pmatrix} M & M^k \vec{V} \end{pmatrix}$$

" $\vec{V}$ " $\vec{W}$ rozkład prawd.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Prawd bycia w } i? \\ \sum_j m_{ij} w_j \\ (M \vec{W})_i \end{array} \right\} i (-)$$

$$M \lim_{k \rightarrow \infty} M^{kT} = (M W) = W$$

Definicja 9.5. Ranking dla macierzy stochastycznej M to wektor $\vec{R}$, taki, że $M\vec{R} = \vec{R}$ oraz $\sum_i r_i = 1$.

wektor własny dla $\lambda = 1 \rightarrow M\vec{R} = \vec{R}$

Rankingiem wierzchołka grafu jest odpowiadająca współrzędna tego wektora.

„Stabilny rozkład prawdy”

Innymi słowy, jest to wektor własny dla wartości 1.

R -wektor stoc. $MR = R$

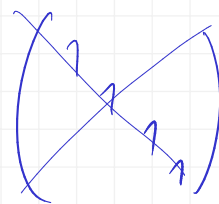
Uwaga. Ranking to „stabilny” rozkład prawdopodobieństwa, w tym sensie, że odpowiada prawdopodobieństwu znalezienia się w danym wierzchołku po dużej liczbie kroków (ta intuicja niestety jest zawodna z paru powodów).

Uwaga. Zauważmy, że zamiast $\sum_i r_i = 1$ moglibyśmy wziąć dowolną inną niezerową liczbę, ale dla 1 to daje ładną interpretację probabilistyczną.

Chcielibyśmy, żeby ranking istniał, był jedyny oraz był nieujemny (i żeby można go było łatwo policzyć).

Lemat 9.6 (Istnienie rankingu). Macierz stochastyczna ma wartość własną 1.

• macierze M oraz M^T mają te same wartości własne.



$M \leftarrow \text{kol. stoc.}$

$$MR = R$$

$M^T \leftarrow \text{wiersz wt 1}$
łatwo podać wekt wt.

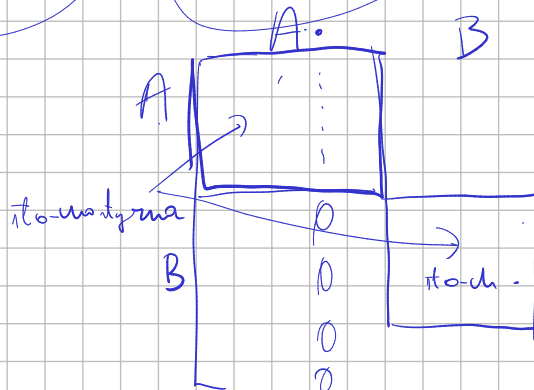
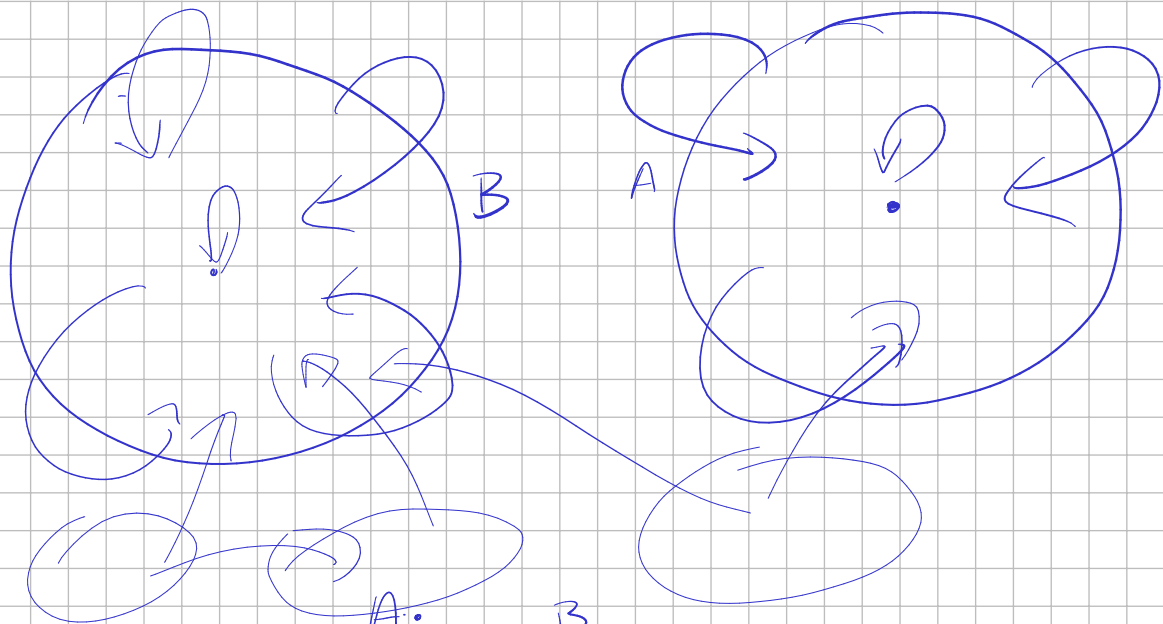
$$M^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \sum_j m_{ij}^T \cdot 1 = \sum_j m_{ij}^T = 1$$

suma el. w wierszu

Fakt 9.7. Jeśli w grafie, który nie ma wierzchołków bez wychodzących krawędzi, istnieją dwa różne podzbiory wierzchołków, z których nie ma krawędzi wychodzących poza ten zbiór, to ranking nie jest jedyny.

Uwaga. W praktyce, graf internetu nie był spójny (teraz być może już jest).

Poza tym wiszące wierzchołki są problemem.



$$\begin{bmatrix} R_A \\ R_B \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A & R_A = R_A \\ B & R_B = R_B \end{matrix}$$

$$M \quad \tilde{R}_A \tilde{R}_A \quad M \tilde{R}_B = \tilde{R}_B \quad \begin{bmatrix} R_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A R_A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} R_A \\ 0 & -\frac{1}{2} R_B \end{bmatrix}$$

9.2 Macierze dodatnie, PageRank

Aby zapewnić te warunki, zajmijmy się inną macierzą: dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa M rozmiaru $n \times n$ oraz liczby $0 < m < 1$ definiujemy

$$M' = (1 - m)M + m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

0,17

Dla odpowiedniej wartości m ranking tej macierzy to PageRank.

Fakt 9.8. Macierz M' jest macierzą stochastyczną.

Uwaga. Macierz ta ma naturalną interpretację jako proces losowy: w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1 - m$ losujemy krawędź wychodzącą, zaś z prawdopodobieństwem m losujemy jednorodnie jeden ze wszystkich wierzchołków.

Uwaga. Poniższe definicje oraz dowody dla macierzy dodatnich są prostszym wariantem ogólniejszego twierdzenia Frobeniusa-Perrona i jego dowodu.

Definicja 9.9. Mówimy, że macierz A jest dodatnia, co zapisujemy $A > 0$, jeśli wszystkie jej elementy są dodatnie.

Lemat 9.10. Jeśli $A \geq 0$ i jest kolumnowo stochastyczna oraz $A\vec{V} = \vec{V}$ to $\vec{V} > 0$ lub $\vec{V} < 0$.

fakt
 $\Rightarrow \begin{matrix} a_1, \dots, a_n \text{ różnych znaków} & a_i > 0 & a_j < 0 \\ \sum |a_i| > |\sum a_i| & |a_i| + |a_j| > |a_i + a_j| \end{matrix}$

$\vec{V}$ nie wprost różne znaki $v_1, \dots, v_n$

$A\vec{V} = \vec{V}$ $a_{ij} v_j \quad j=1 \dots n$

$|v_i| = \left| \sum_j a_{ij} v_j \right| < \sum_j a_{ij} |v_j|$ *j-tej sumy kolumny*

$\sum_i |v_i| < \sum_i \sum_j a_{ij} |v_j| = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right) |v_j|$

$\vec{V} \geq 0$ $> 0 =$

$0 < v_i = \sum_j a_{ij} v_j$ *wszystkie > 0*

$\vec{V} > 0$

Lemat 9.11. Dla dwóch niezależnych wektorów $\vec{S}, \vec{T} \in \mathbb{R}^n$ istnieje ich kombinacja liniowa, która ma pozycje różnych znaków.

$$S, T > 0$$

$$\alpha S + \beta T \leftarrow \text{różne znaki}$$

• S, T mają różne znaki $\Rightarrow OK$

$$S \geq 0, T \geq 0$$

bo musimy wp, że obu mają 0.

$$S \geq 0$$

$$f(\alpha) = S + \alpha T \quad \alpha \geq 0$$

$$\alpha \rightarrow -\infty$$

$$\alpha \rightarrow +\infty$$

$$f(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ -\infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}$$

$$(S + \alpha T)_i = 0$$

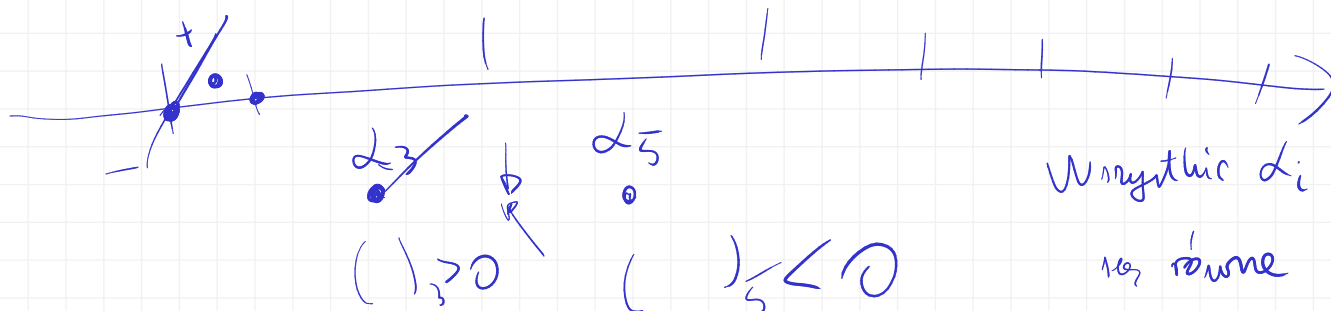
$$\alpha = \alpha_i$$

$$(S + \alpha T)_i = 0$$

$$s_i \quad t_i$$

$$\alpha_i = -\frac{s_i}{t_i}$$

$$-\infty$$



Nie ma $\Rightarrow$

wszystkie $\frac{s_i}{t_i} \leftarrow$ różne

$\Rightarrow$ uniquely determined

$$\alpha = \alpha_i \quad (S - \alpha T)_i = 0$$

Twierdzenie 9.12. Dla stochastycznej macierzy dodatniej A mamy $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

$A > 0$, stoch

Nie wprost: nie

$$\dim \mathbb{V}_1 \geq 1$$

$S, T \leftarrow$ dwa niezależne wektory w $\mathbb{V}_1$

Z lematu $\Rightarrow \alpha S + \beta T \in \mathbb{V}_1$ i ma różne znaki

$\hookrightarrow$ z pom. lematem $A > 0$, stoch

$$A\vec{V} = \vec{V} \quad V < 0, V > 0$$

$A > 0$, stoch.

Wniosek: Ranking jest jedyny, dodatni

$$\exists \vec{V} \quad A\vec{V} = \vec{V}$$

$$\bullet \dim \mathbb{V}_1 = 1 \Rightarrow$$

$$\bullet \vec{V} > 0$$

$$\bullet \sum v_i = 1$$

$$\alpha \left(\sum v_i \right)^{-1}$$

$$\alpha \vec{V}$$

$$\alpha \circ \vec{V} \leftarrow$$

$$\alpha \cdot \left(\sum v_i \right)$$

$$\text{suma wsp} = 1 > 0$$

9.3 Obliczanie rankingu

Pozostaje powiedzieć, jak można policzyć ranking dla macierzy stochastycznej dodatniej.

Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną.

9.3.1 Układ równań

Najprostsza obserwacja, to że skoro wymiar $\dim \mathbb{V}_1 = 1$,

Fakt 9.13. Niech $A > 0$ będzie macierzą kolumnowo stochastyczną. Układ równań

$$\begin{cases} (A - \text{Id})\vec{X} = 0 \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases} \leftarrow \text{wektor wt wart wst 1}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

$$\begin{aligned} n &\leq n \times n \\ n &\sim 3 \cdot 10^9 \\ n^2 & \quad O(n^3) \end{aligned}$$

Ten układ można więc rozwiązać problematyczny jednak jest jego rozmiar.

9.3.2 Metoda iteracyjna.

$$M' = (1-m)M + m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Alternatywnie, chcemy pokazać, że można to policzyć jako granicę $(M')^k \vec{V}$ (dla sensownie wybranego $\vec{V}$).

Weźmy dowolny wektor $\vec{V} > 0$ o sumie współrzędnych 1, niech $\vec{R}$ będzie rankingiem. Policzmy:

$$M'(\vec{R} + (\vec{V} - \vec{R})) = M'\vec{R} + M'(\vec{V} - \vec{R}) = \vec{R} + M'(\vec{V} - \vec{R})$$

$$M^k(\vec{V}) = \vec{R} + M^k(\vec{V} - \vec{R}) \leftarrow \text{możemy?}$$

$(\vec{V} - \vec{R})$: suma wsp = 0

Zdefiniujmy $\mathbb{V}_{=0}$: przestrzeń liniową wektorów, których współrzędne sumują się do 0:

$$\mathbb{V}_{=0} = \{[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]^T : \sum_i v_i = 0\}.$$

Fakt 9.14. $M^k(\vec{V} - \vec{R}) \in \mathbb{V}_{=0}$.

$$(M^k W) \in \mathbb{V}_{=0}$$

Chcemy coś powiedzieć o „granicy” $M^k \vec{W}$ dla $\vec{W} \in \mathbb{V}_{=0}$. Skoro jest granica, to jest potrzebna jakaś odległość.

Definicja 9.15. Norma ℓ_1 $\|\cdot\|_1$ wektora $\vec{V} = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]^T$ to

$$\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|.$$

Tak zdefiniowana norma nie rośnie przy stosowaniu macierzy stochastycznych:

Fakt 9.16. Niech A będzie macierzą stochastyczną. Wtedy dla dowolnego wektora $\vec{V}$:

$$\|A\vec{V}\|_1 \leq \|\vec{V}\|_1.$$

$$\|M'(\vec{V} - \vec{R})\|_1 \leq \|\vec{V} - \vec{R}\|_1$$

W ogólności można pokazać, że dla dowolnej macierzy stochastycznej $A > 0$ oraz $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|AV\|_1 \leq (1 - \epsilon(A))\|V\|_1$$

$$0,97$$

dla pewnej (dodatniej) funkcji $\epsilon(A)$ macierzy A .

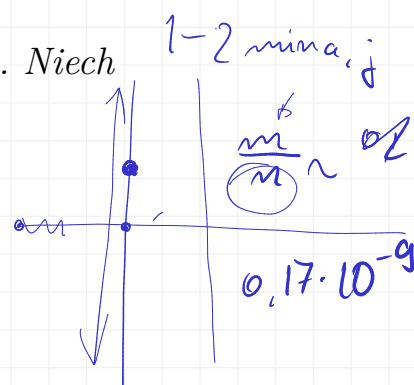
Lemat 9.17. Niech A będzie dodatnią macierzą stochastyczną. Niech

$$a = \max_{1 \leq j \leq n} (1 - 2 \min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}).$$

Niech $\vec{0} \neq \vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$. Wtedy

$$\|AV\|_1 \leq a\|V\|_1.$$

$$\uparrow (1 - 10^{-9})$$



$$\checkmark$$

$$R + \underbrace{(\vec{V} - \vec{R})}_{\substack{\parallel \\ \perp}} \xrightarrow{M^h} R + M'^h(\vec{V} - \vec{R})$$

$$\|M^h \vec{V} - \vec{R}\| \leq (1 - 10^{-9})^h$$

$$\text{multipl. } \approx h$$

2. drit

$$(1 - 10^{-9})^{10^{-9}} \sim \frac{1}{e} \sim \frac{1}{3}$$

Niestety, oszacowanie to jest w pesymistycznym przypadku liniowo zależne od najmniejszego elementu A i tym samym dla macierzy M' z algorytmu PageRank otrzymujemy wartość rzędu $1 - m/n$, gdzie n jest wielkością grafu (u nas: rzędu miliardów) a m parametrem z PageRank (u nas: stała ok. 0,17). Oznacza to, że zbieżność kolejnych iteracji jest bardzo wolna i w ogólności potrzebujemy $\Theta(n)$ iteracji, by zmniejszyć błąd dwukrotnie. Tym samym cała operacja jest w ogólności niewykonalnie obliczeniowo. Na szczęście, w przypadku dla macierzy M' z PageRank można pokazać dużo lepsze ograniczenie:

Lemat 9.18. Niech $A \geq 0$ będzie macierz stochastyczną (niekoniecznie dodatnią!) rozmiaru $n \times n$ a P macierzą stochastyczną $n \times n$ postaci

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Dla liczby rzeczywistej $0 \leq m \leq 1$ niech M_m oznacza macierz

$$M_m = (1 - m)A + mP,$$

wtedy dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|M_m \vec{V}\|_1 \leq (1 - m)\|\vec{V}\|_1.$$

$$m \approx 0,17$$

$$\approx 0,83 \leftarrow \text{stała}$$

$$10^{-9} \rightarrow \text{kilkomiesię / } \approx 0 \text{ operacji}$$

Zauważmy też, że obliczanie $M' \vec{V}$ jest prostsze ze względu na strukturę M' : nasza dodatnia macierz stochastyczna jest w istocie macierzą

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \quad (1 - m)M + m \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Wtedy:

kilkonet

$$M \vec{V} \sim n^2$$

$$\begin{aligned} & \left((1 - m)M + mP \right) \vec{V} = (1 - m)M \vec{V} + m \cdot P \cdot \vec{V} \\ & = (1 - m)M \cdot \vec{V} + \begin{bmatrix} \frac{m}{n} \\ \frac{m}{n} \\ \vdots \\ \frac{m}{n} \end{bmatrix} \quad \text{proste } 100 \cdot n \\ & \quad (m \cdot P \cdot \vec{V})_i = \frac{m}{n} \cdot \sum_j 1 \cdot v_j = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Zauważmy, że ten iloczyn liczy się dużo prościej: macierz M jest dość rzadka. Co więcej, liczenie można zrównoleglić (każdy element $M \vec{V}$ może być liczony osobno).

Uwaga. W podobny sposób pokazuje się Lemat 9.18.

9.4 Dowód zbieżności przy użyciu macierzy Jordana

Nie prezentowane na wykładzie; dla zainteresowanych

9.5 Grafy silnie spójne

M - m. macierze stoch.

Jeśli dany na wejściu graf jest silnie spójny (czyli z każdego wierzchołka da się dojść do każdego innego), to można pokazać, że $\dim V_1 = 1$ nawet dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa.

Choć założenie o silnej spójności wygląda niewinnie, to w praktyce jest to bardzo silne i rzadko spełnione założenie.

Definicja 9.19. Mówimy, że (skierowany) graf jest *silnie spójny*, jeśli dla każdej pary wierzchołków i, j istnieje ścieżka z i do j (oraz z j do i).



$$\dim V_1 = 1$$

Lemat 9.20. Dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa M grafu silnie spójnego o n wierzchołkach macierz $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M^i$ jest dodatnią macierzą stochastyczną.

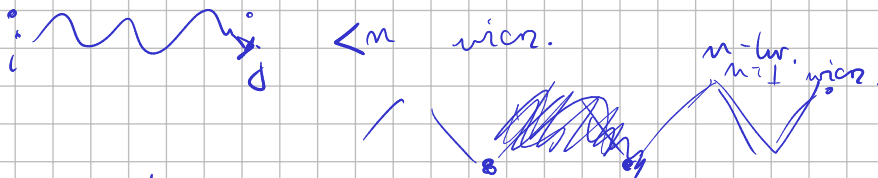
$M^i \leftarrow \text{stochastyczne}$
 $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} M^i \leftarrow \text{też jest stochastyczne}$
 $M^i \leftarrow V$
 $M \leftarrow \text{doch.}$
 $(M)_{ij}^k$ czy da się w k krokach dojść z j do i

mac. ind. $\begin{matrix} k=0 \\ k=1 \end{matrix} \quad \text{ld} \quad M^k = M$

$k \rightarrow k+1$
 $(M^{k+1})_{ij} = (M \cdot M^k)_{ij} = \sum_l M_{il} \cdot M_{lj}^k$

$(M^k)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nie da się z } i \text{ do } j \text{ w } k \text{ krokach} \\ > 0 & \text{da się} \end{cases}$

silnie spójna



$M_{ij}^L > 0 \quad L < n$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} M^k_{ij} > 0$

$\left(\sum \frac{1}{n} M^k \right) > 0$

M

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M^i > 0 \quad 125$$

Lemat 9.21. Jeśli $\vec{V}$ jest wektorem własnym znormalizowanej macierzy sąsiedztwa dla wartości 1, to jest nim też dla macierzy $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M^i$. M

$$M \vec{V} = \vec{V}$$

$$M^{k+1} \vec{V} = M(M^k \vec{V}) = M \vec{V} = \vec{V}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} M^i \right) \vec{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M^i \vec{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{V} = \vec{V}$$

Twierdzenie 9.22. Jeśli graf jest ^{połączony} spójny, to jego znormalizowana macierz sąsiedztwa ma $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

nie uprzedzić $\dim \mathbb{V}_1 > 1 \nleftrightarrow S, T \leftarrow \begin{matrix} \text{własny} \\ \text{wektor} \end{matrix}$

$$M \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} M^i \right) \vec{V} = S, T \quad \dim \mathbb{V}_1 > 1 \quad \nleftrightarrow$$

$\vec{V} = 0$ $\dim \mathbb{V}_1 > 1$ $\nleftrightarrow$

$\dim \mathbb{V}_1 = 1$

$S, T \leftarrow \begin{matrix} \text{własny} \\ \text{wektor} \end{matrix}$ $\dim \mathbb{V}_1 > 1$ $\nleftrightarrow$

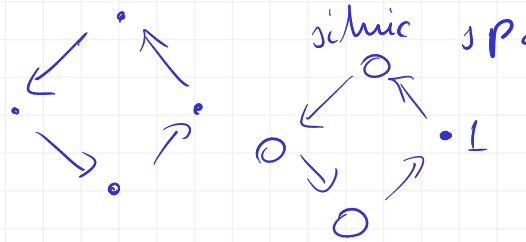
> ○

Uwaga. W rozdziale 9.5 pokazaliśmy, że jeśli graf jest silnie spójny, to ma jednoznacznie wyznaczony ranking.

Jednak nietrudno pokazać, że silna spójność nie wystarcza, by zagwarantować poprawność iteracyjnych metod obliczania rankingów: przykładowo: dla grafu będącego n -cyklem skierowanym ranking przydziela $\frac{1}{n}$ każdemu wierzchołkowi. Z drugiej strony, dla wektora $\vec{E}_i$ potęgi $M^k \vec{E}_i$ to wektory jednostkowe.

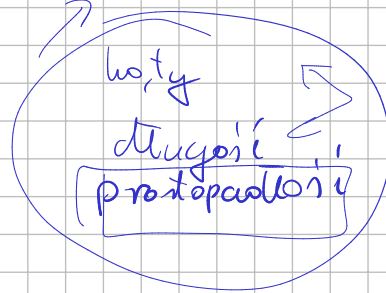
By zagwarantować poprawność metod iteracyjnych, należy dodatkowo założyć, że największy wspólny dzielnik wszystkich cykli w grafie to 1.

Ten problem ma też teoretyczną interpretację: jest to pytanie o zbieżność rozkładu do rozkładu stacjonarnego.



$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$



Wzrost słabości

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = xx' + yy' + zz'$$
$$\sum x_i x_i'$$

wzrost

it. it. it.



ogólny il. sk.

mod $\mathbb{R} (\mathbb{C})$
długość, kąt

Rozdział 10

(Standardowy) iloczyn skalarny

10.1 Standardowy iloczyn skalarny

Definicja 10.1 (Standardowy iloczyn skalarny). Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz wielu $\mathbb{F}^n$ (ale nie $\mathbb{C}^n$) definiujemy iloczyn skalarny jako:

$$[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]^T \cdot [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]^T = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \vec{u}_i, \quad \text{skalar}$$

zauważmy, że

$$\boxed{\phantom{[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]^T}} \cdot \boxed{[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]^T} = \boxed{\vec{V}^T \cdot \vec{U}} = \boxed{[\vec{V} \cdot \vec{U}]} \quad \text{macierz } 1 \times 1$$

W wielu wypadkach nie będziemy rozróżniać pomiędzy skalarą a macierzą 1×1 : choć formalnie jest to nadużycie, owocuje dużo prostszą notacją. Dla $\mathbb{C}^n$ definiujemy zaś:

$$[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]^T \cdot [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]^T = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \overline{\vec{u}_i}$$

Dla $\mathbb{R}^n$ czy $\mathbb{C}^n$ możemy go użyć do zdefiniowania (standardowej) długości, odległości oraz prostopadłości, kąta:

długość Długość (norma) wektora $\vec{V}$ to

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

odległość Odległość między wektorami $\vec{U}, \vec{V}$ to

$$\|\vec{U} - \vec{V}\|$$

kąt Kąt między wektorami $\vec{U}, \vec{V}$ to $\alpha \in [0, \pi]$ spełniające warunek

$$\cos \alpha = \frac{\vec{V} \cdot \vec{U}}{\|\vec{V}\| \cdot \|\vec{U}\|}$$

prostopadłość Dwa wektory $\vec{U}, \vec{V}$ są prostopadłe, co oznaczamy jako $\vec{V} \perp \vec{U}$, jeśli

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$$

Ta definicja prostopadłości okaże się przydatna nawet wtedy, kiedy kąt czy długość nie mają wiele sensu.

W dalszej części będziemy się zajmować iloczynem w wersji bez sprzężenia.

Fakt 10.2. Standardowy iloczyn skalarny jest:

$$v^T \cdot u$$

1. liniowy względem każdej współrzędnej (dla wersji dla $\mathbb{C}$: dla pierwszej współrzędnej)

2. symetryczny, tj. $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$ (wersja nad $\mathbb{C}$: antysymetryczny).

$$u \cdot v = u^T \cdot v \quad (v \cdot u^T = (v^T \cdot u)^T = u^T \cdot v)$$

Lemat 10.3 (Cauchy-Schwartz). Dla $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność

$$\vec{U} \cdot \vec{V} \leq \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{U}, \vec{V}$ są liniowo zależne.

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja 10.4 (Wektory prostopadłe). Dwa wektory $\vec{U}, \vec{V}$ są prostopadłe, gdy $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$. Zapisujemy to też jako $\vec{U} \perp \vec{V}$.

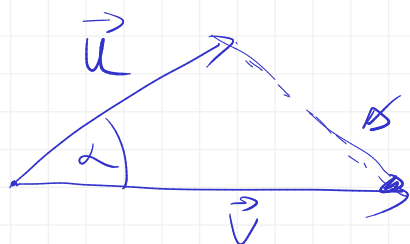
Lemat 10.5. Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ podane powyżej definicje długości, prostopadłości i kąta między wektorami pokrywają się z tradycyjnymi.

• $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ długość u $\sqrt{\sum u_i^2}$

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum u_i^2}$$

• kąt:

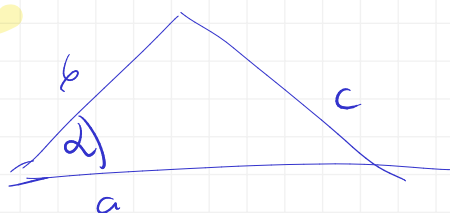
$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$



$$\begin{aligned} & \|v-u\|^2 \\ & (v-u) \cdot (v-u) \\ & = v \cdot v - v \cdot u - u \cdot v + u \cdot u \\ & = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2u \cdot v \end{aligned}$$

$$= \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2u \cdot v$$

twierdzenie cosinusów:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cos \alpha \cdot a \cdot b$$

$$\|v-u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cos \alpha \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

← tw. kos.

$$u \cdot v = \cos \alpha \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

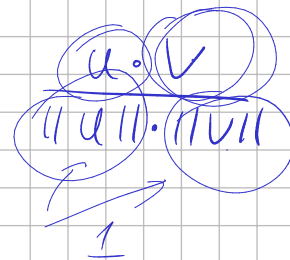
Bez tw. cosinusów?

B20

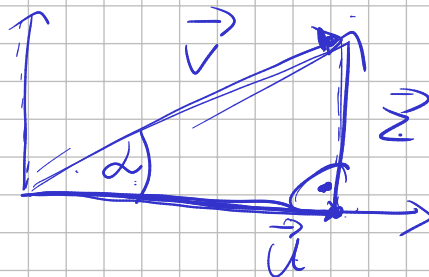
$$\|u\| = 1 = \|v\|$$

$$u \leftarrow u \cdot \frac{1}{\|u\|}$$

$$v \leftarrow v \cdot \frac{1}{\|v\|}$$



$$\cos \alpha = u \cdot v$$



$$v = a \cdot \vec{u} + \vec{z}$$

$$\cos \alpha = \|a \cdot \vec{u}\| = a$$

$$u \cdot v = u \cdot (a u + z) = u \cdot (a u) + \underbrace{u \cdot z}_0$$

$$= a \cdot \underbrace{(u \cdot u)}_1 = a$$

$$\cos \alpha = u \cdot v$$

Zatwierdzamy, że $\exists a, z \quad v = a \cdot u + z$

Jeśli mamy sensowny kondydat:

$$v = \underbrace{(u \cdot v) \cdot u}_{a \cdot u} + \underbrace{(v - (u \cdot v) \cdot u)}_{? \cdot z}$$

$$u \perp (v - (u \cdot v) \cdot u)$$

$$\begin{aligned} & (u) \cdot (v - (u \cdot v) \cdot u) \\ &= (u \cdot v) - \underbrace{u \cdot ((u \cdot v) \cdot u)}_{\text{kurka}} = (u \cdot v) - \underbrace{(u \cdot v)}_{\text{kurka}} \underbrace{(u \cdot u)}_{\frac{1}{2}} \\ &= (u \cdot v) - (u \cdot v) \\ &= 0 \end{aligned}$$