

WYKŁAD 9

Standardowy il. skalarowy

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{F}^n \quad \leftarrow \text{skalar} \quad \vec{u}^T \vec{v} = \left[\sum u_i v_i \right] \quad \text{matrix } 1 \times 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i$$

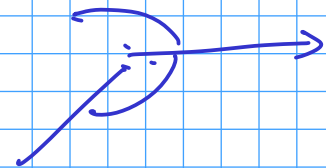
$\mathbb{R}^n \leftarrow$ doktadnie many il. sk.

def: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

odd. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

prost. $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

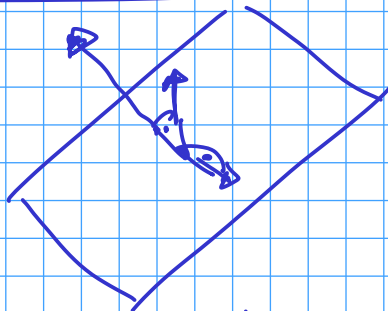
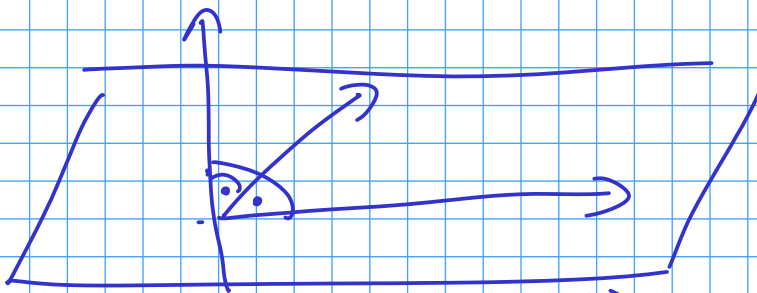
kośt.



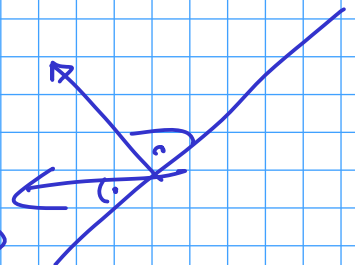
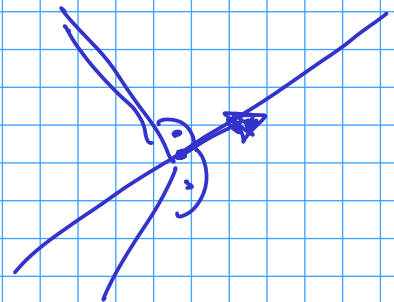
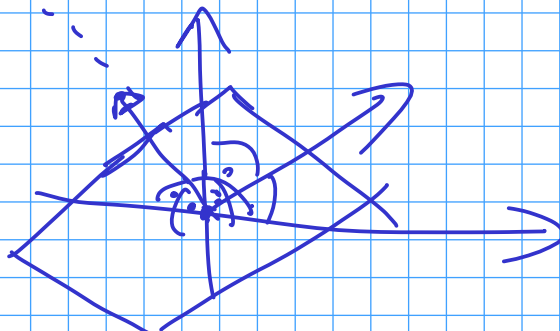
$$\vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$\mathbb{F}_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+1=0$$



$\mathbb{R}^n$



10.2 Dopełnienie ortogonalne

(W)

Definicja 10.6 (Dopełnienie ortogonalne). Niech $U \subseteq \mathbb{F}^n$. Wtedy dopełnienie ortogonalne U to:

$$U^\perp = \{\vec{V} \in \mathbb{F}^n : \forall \vec{W} \in U \vec{V} \perp \vec{W}\}$$

Fakt 10.7. Jeśli $\text{LIN}(B) = W$ to $\vec{V} \in W^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{V}$ jest prostopadły do każdego wektora z B .

$$B^\perp = \text{LIN}(B)^\perp$$

•

$$\Rightarrow \vec{V} \in \text{LIN}(B)^\perp \Rightarrow \vec{V} \in B^\perp$$

$$\Leftarrow \vec{V} \in B^\perp \quad \vec{u} \in \text{LIN}(B)$$

$$\vec{u} = \sum \alpha_i \vec{B}_i$$

$$\vec{V} \cdot \vec{u} = \vec{V} \cdot \left(\sum \alpha_i \vec{B}_i \right)$$

$$= \sum \alpha_i (\underbrace{\vec{V} \cdot \vec{B}_i}_{\substack{B^\perp \perp B}}) = \sum \alpha_i \cdot 0 = 0$$

Lemat 10.8. $(\text{LIN}(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m))^\perp = \ker([\vec{V}_1 | \dots | \vec{V}_m]^T)$.Ponadto, gdy $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m \in \mathbb{F}^n$ są liniowo niezależne, to $\dim \text{LIN}(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_m)^\perp = n - m$.
W szczególności, $W^\perp \leq \mathbb{F}^n$.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \dots & \vec{V}_m \end{array} \right)^T$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1^T \\ \vec{V}_2^T \\ \vdots \\ \vec{V}_m^T \end{bmatrix} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1^T \cdot \vec{u} \\ \vec{V}_2^T \cdot \vec{u} \\ \vdots \\ \vec{V}_m^T \cdot \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \cdot \vec{u} \\ \vec{V}_2 \cdot \vec{u} \\ \vdots \\ \vec{V}_m \cdot \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \in \ker(\quad)$$

Lemat 10.9. Niech $U \subseteq \mathbb{F}^n$. Wtedy $(U^\perp)^\perp \supseteq U$.

$$W, W^\perp \quad (W^\perp)^\perp = W$$

$$U \subseteq (U^\perp)^\perp$$

$$\left\{ \begin{array}{c} U^\perp \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}^\perp$$

$$\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$$

$$\vec{v} \in U^\perp \quad \vec{u} \in U$$

$$\vec{u} \in (U^\perp)^\perp \quad \vec{v} \perp \vec{u}$$

Folgt

$$U^\perp \subseteq F^n$$

$$\vec{0} \in U^\perp$$

$$\vec{v}, \vec{v}' \in U^\perp$$

$$(\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}' \cdot \vec{u} = 0 + 0 = 0$$

$$(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{u} = \lambda (\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_0) = \lambda \cdot 0 = 0$$

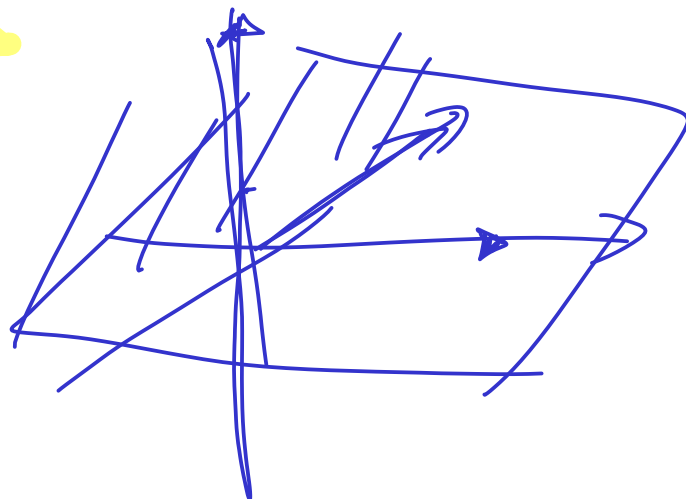
Wniosek 10.10. Niech $W \leq \mathbb{F}^n$. Wtedy $(W^\perp)^\perp = W$.

$$W \leq (W^\perp)^\perp$$

$$\dim W = m \quad \mathbb{F}^n$$

$$\dim W^\perp = n - \dim W = n - m$$

$$\dim (W^\perp)^\perp = n - \dim W^\perp = n - (n - m) = m$$



$$\mathbb{F}_2^n$$

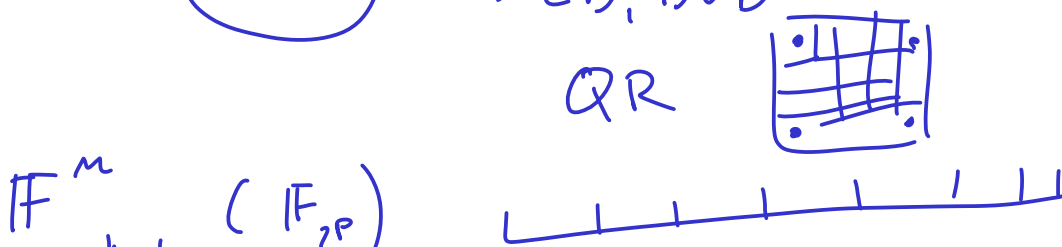
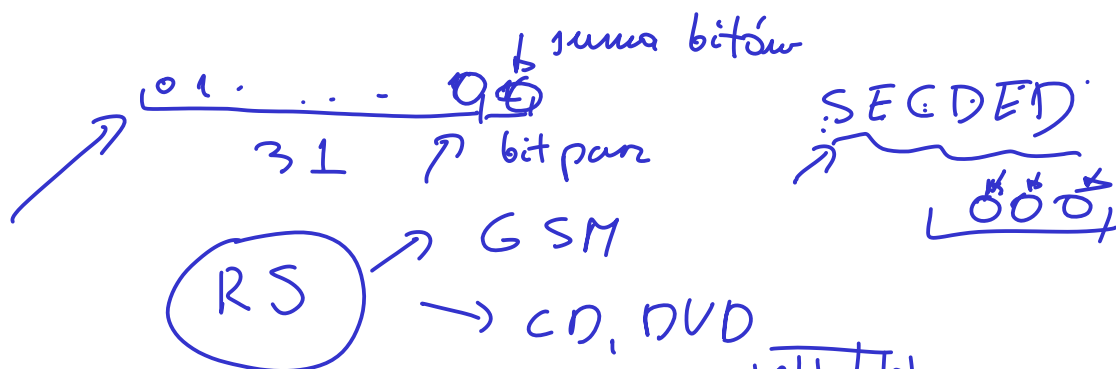
$$W^\perp = W$$

$$\mathbb{F}_2^2 \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

10.3 Zastosowanie: kody korekcyjne

Linowym kodem korekcyjnym nazywamy podprzestrzeń $W \leq \mathbb{F}^n$ dla skończonego ciała $\mathbb{F}$; zwykle dobieramy $\mathbb{F}$ takie, że $|\mathbb{F}|$ jest potęgą 2. Niech $k = \dim W$.



$$\mathbb{F}^m \quad (\mathbb{F}_{2^p})$$

$$W \leq \mathbb{F}^m$$

$$m < n$$



$$W = \text{LIN}(W_1, W_2, \dots, W_m)$$

$$W = \left[W_1 | W_2 | \dots | W_m \right]$$

kodowanie

$$W \cdot C \xrightarrow{\text{kodowanie}}$$

słowo kodowe

n bitów

liniowo nier.

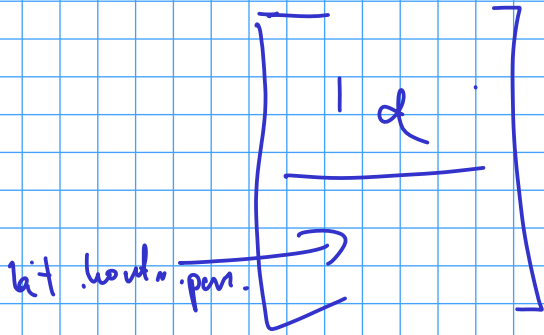
$$\mathbb{F}_2^n$$

2^m elementów

$$W \cdot \textcircled{C} =$$

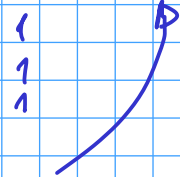
C

⋮ ← bity kontrolni parz.



NIE

abc → a a a b b b c c c



abcabcabc

Równoważne kody $\|W\|, \|W'\|$
 jeżeli powstaje przez zamianę współrzędnych

$$W \cdot C = \begin{bmatrix} C \\ \hline \end{bmatrix} \text{ bity parz.}$$

Kodowanie systematyczne

Lemat 10.11. Dla kodu $\mathbb{W}$ istnieje równoważny kod $\mathbb{W}'$ dla którego istnieje macierz generatorów jest postaci $\begin{bmatrix} \text{Id} \\ M' \end{bmatrix}$. $\begin{pmatrix} \text{Id} \\ n' \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} C \\ M' \cdot C \end{pmatrix}$

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Takie kodowanie nazywamy *systematycznym*. Zauważmy, że kodowanie, jak i dekodowanie jest dużo prostsze dla kodowania systematycznego. Prostym kodem systematycznym jest np. dodawanie bitu kontroli parzystości.

Okazuje się, że przy poprawianiu błędów, czy nawet sprawdzaniu, czy wektor należy do kodu, macierz generatorów nie sprawdza się za dobrze. Zamiast tego używa się *macierzy parzystości*:

Dla kodu $\mathbb{W}$ kod $\mathbb{W}^\perp$ to *kod dualny*. Macierz generatorów kodu dualnego to *macierz parzystości* oryginalnego kodu. Innymi słowy: P jest macierzą parzystości $\mathbb{W}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{W} = \ker P$.

To pozwala na proste sprawdzenie, czy wektor jest w kodzie. Co więcej, najlepsze algorytmy dekodowania zwykle oparte są na własnościach macierzy parzystości.

$\text{kod } \mathbb{W} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} \vec{v} \end{pmatrix}$
 $\text{kod dualny } \mathbb{W}^\perp \leftarrow \begin{pmatrix} \vec{v} \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow{\text{macierz gen. } P} P^T \cdot \vec{v}$
 $\text{macierz kontroli parzystości}$
 $\vec{v} \in \mathbb{W} \Leftrightarrow \vec{v} \in (\mathbb{W}^\perp)^\perp$
 $\vec{v} \in \ker(P^T)$
 $\text{macierz gen. } \mathbb{W}^\perp$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum \vec{u}_i \cdot \vec{v}_i$
 $\mathbb{F}^n$
 $\mathbb{R}^n$

długości
kąt

mod $\mathbb{R}$
mod $\mathbb{C}$

wielomiany
 $x^2 + x$? x^3 ?

0 1 0
1 0 0
0 0 0

można, ale
stanno

Rozdział 11

Ogólny iloczyn skalarny

Definicja 11.1 (Iloczyn skalarny). Iloczyn skalarny to funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V}^2 \mapsto \mathbb{F}$ (gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$) spełniająca warunki:

- (SK1) liniowa po pierwszej współrzędnej
- (SK2) symetryczna, tj. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$; (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub antysymetryczny $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$ (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).
- (SK3) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ dla $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Przestrzeń liniową, która ma tak określony iloczyn skalarny, nazywamy przestrzenią Euklidesową (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub unitarną (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

- dl.
- odl.
- $\perp$
- kąt

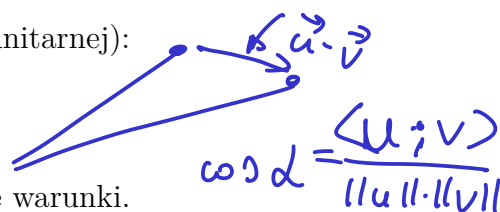
Definicja 11.2 (Wektory prostopadłe). Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ są prostopadłe, gdy $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Zapisujemy to też jako $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Definicja 11.3 (Długość i odległość). W przestrzeni Euklidesowej (unitarnej):

Norma (długość) wektora $\vec{v}$ to $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

Odległość między $\vec{u}$ a $\vec{v}$ to norma z $(\vec{u} - \vec{v})$, tj. $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Przykład 11.4. • Tradycyjny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ spełnia te warunki.



- W przestrzeni wielomianów (nad $\mathbb{R}$) jako iloczyn skalarny można wziąć całkę (po odpowiednim zakresie):

$$\langle u, v \rangle = \int_I u(x)v(x)dx$$

- dla zmiennych losowych X, Y iloczynem skalarnym jest $\mathcal{E}[X \cdot Y]$, tj.

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Y(\omega) \cdot \mathbb{P}[\omega]$$

Dużo częściej stosuje się jednak kowariancję:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y(\omega) - \mathbb{E}[Y]) \cdot \mathbb{P}[\omega]$$

Zauważmy, że formalnie nie jest to iloczyn skalarny: dla funkcji stałej jest on równy 0; formalnie identyfikujemy funkcje przesunięte o stałą. $X \leftarrow \text{stała}$ $\text{cov}(a, a) = 0$

Lemat 11.5. Jeśli V jest przestrzenią Euklidesową (unitarną), to:

- $\|t\vec{v}\| = |t| \cdot \|\vec{v}\|$
- $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (Nierówność Cauchy-Schwartz); równość $\iff$ są liniowo zależne
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Nierówność Minkowsky)
- $\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$

$$\left| \cos \angle \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \right| \leq 1$$

$$\|t\vec{v}\| = |t| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\overbrace{|\langle t\vec{v}, t\vec{v} \rangle|}^{\text{WCS}} = \overbrace{|t \cdot t \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}^{t^2} = \overbrace{|t|^2}^{|t|} \cdot \overbrace{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}^{\|\vec{v}\|} = |t| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\text{WCS} \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad "=" \text{ dla liniowo zależnych}$$

$$1) \vec{u} = 2 \cdot \vec{v} \quad \left(\langle u, v \rangle = \langle 2v, v \rangle = 2 \langle v, v \rangle = 2 \|v\|^2 \right) \\ \|u\| \cdot \|v\| = \|2\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| = 2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| = 2 \|v\|^2$$

$$2) \langle u - 2v, u - 2v \rangle > 0 \quad u, v - \text{liniowo niez.}$$

$$\langle u, u - 2v \rangle = \langle u, u \rangle - 2 \langle u, v \rangle = \langle u, u \rangle - 2 \langle u, v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - 2 \langle u, v \rangle + 2 \langle v, v \rangle > 0$$

$$f(2) > 0 \Rightarrow \text{"wyróżnik"} < 0$$

$$\underbrace{\|v\|^2}_{\geq 0} - 2 \cdot \underbrace{\langle u, v \rangle}_{\leq \|u\| \cdot \|v\|} + \underbrace{\|u\|^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

u, v $\lim_{\text{min.}}$ $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

lim. sat. $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$

• $\|u\| + \|v\| \geq \|u + v\|$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\sqrt{\|u+v\|^2} \leq \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2}$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

2.)

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$$



$$\|u\| \leq \|u - v\| + \|v\|$$

$$\|u - v\| + \|v\| \geq \|(u - v) + v\| = \|u\|$$

Definicja 11.6. W przestrzeni Euklidesowej (unitarnej) dla wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ kąt między nimi to jedyne takie $\alpha \in [0, \pi]$, że

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$$

11.1 Baza ortonormalna

Definicja 11.7 (Układ (baza) ortogonalny, układ (baza) ortonormalny). Układ wektorów $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jest *układem ortogonalnym*, jeśli dla $i \neq j$ mamy $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$. Jest *układem ortonormalnym*, jeśli dodatkowo $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 1$.

Analogicznie definiujemy bazę ortogonalną i ortonormalną.

To jest w pewnym sensie odpowiednik bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 11.8. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną). Wtedy V ma bazę ortonormalną.

Dowód wynika z bardziej technicznego lematu:

Lemat 11.9. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną), niech B będzie niezależnym układem ortogonalnym. Wtedy $\text{LIN}(B) = V$ lub istnieje $\vec{b}' \in V \setminus B$, taki że $B' = B \cup \{\vec{b}'\}$ jest ortogonalny i niezależny.

B układ ortonormalny

$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$

$\vec{b} \in V \setminus B$

$\vec{b} \perp \vec{b}_i$?

$B \cup \{\vec{b}\}$ liniowo nier.

$$\vec{b}' := \vec{b} - \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_i \rangle \vec{b}_i \neq \vec{0}$$

$B \cup \{\vec{b}'\}$ liniowo nier.

$$\langle \vec{b}', \vec{b}_j \rangle = \langle \vec{b} - \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_i \rangle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle$$

$$\langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}, \vec{b}_i \rangle \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle =$$

$$\langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = 0$$

$\vec{b}' \perp \vec{b}_j$

$B \cup \{\vec{b}'\}$ ortonorm. nier.

Lemat 11.10. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną), $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ bazą ortonormalną a $\vec{v} \in \mathbb{V}$. Wtedy

$$[\vec{v}]_B = [\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle, \langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle, \dots, \langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle]^T.$$

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{v}_i$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i, \vec{v}_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \alpha_j$$

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Lemat 11.11. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną). Niech $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym, zaś $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ bazą ortonormalną. Wtedy

$$M_{BB}(F) = (\langle F(\vec{v}_j), \vec{v}_i \rangle)_{i,j=1,\dots,n}.$$

$$M_{BB}(F) = (\langle \vec{v}_i, F(\vec{v}_j) \rangle)_{i,j}$$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

$$M_{BB}(F) = \left[(F \vec{v}_1)_B \mid (F \vec{v}_2)_B \mid \dots \mid (F \vec{v}_n)_B \right]$$

$$\begin{bmatrix} \langle \vec{v}_1, F\vec{v}_1 \rangle & \langle \vec{v}_1, F\vec{v}_2 \rangle & \vdots \\ \langle \vec{v}_2, F\vec{v}_1 \rangle & \langle \vec{v}_2, F\vec{v}_2 \rangle & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \langle \vec{v}_n, F\vec{v}_1 \rangle & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Lemat 11.12. Jeśli $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni Euklidesowej (lub unitarnej) $\mathbb{V}$, $B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ jest bazą ortonormalną, to

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_B \cdot [\vec{v}]_B$$

$$V, \langle \cdot, \cdot \rangle \rightarrow V \in V$$

B

$$(v)_B \in \mathbb{R}^n, (\cdot)_B(\cdot)$$

$$u, v \in B$$

$$\vec{b}_i, \vec{b}_j$$

$$[\vec{b}_i]_B = \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$$

$$[\vec{b}_j]_B = \vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\vec{u} = \sum \alpha_i \vec{b}_i$$

$$\vec{v} = \sum \beta_j \vec{b}_j$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \sum_i \alpha_i \vec{b}_i, \sum_j \beta_j \vec{b}_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle$$

$$= \sum_i \alpha_i \beta_i$$

$$[\vec{u}]_B \cdot [\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \sum_i \alpha_i \beta_i$$

$$[\sum_i \alpha_i \vec{b}_i] \cdot [\sum_j \beta_j \vec{b}_j] = \left(\sum_i \alpha_i [\vec{b}_i]_B \right) \cdot \left(\sum_j \beta_j [\vec{b}_j]_B \right)$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j [\vec{b}_i]_B [\vec{b}_j]_B$$

tj. wartość iloczynu skalarnego $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ to standardowy iloczyn skalarny reprezentacji $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$.

W szczególności

$$\|\vec{u}\| = \|(\vec{u})_B\| \leftarrow \text{it. dl. Euklidesowa}$$

przy czym długość po prawej to zwykła długość wektorów w $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

$$|\langle u, u \rangle|$$

$$|(u)_B| \leq \text{def. dl. Eukl.}$$

11.2 Dopełnienie ortogonalne

Definicja 11.13 (Dopełnienie ortogonalne). Niech $U \subseteq \mathbb{V}$ będzie podzbiorem przestrzeni Euklidesowej (lub unitarnej). Wtedy *dopełnienie ortogonalne* U to:

$$U^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{V} : \forall \vec{w} \in U \vec{v} \perp \vec{w}\}$$

Uwaga. Po ustaleniu bazy ortonormalnej zachodzi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_B \cdot [\vec{v}]_B$, w szczególności $\vec{u} \in U^\perp \iff [\vec{u}]_B \in [U]_B^\perp$, przy czym w drugim przypadku jest to dopełnienie ortogonalne względem standardowego iloczynu skalarnego.

Tym niemniej, niektóre własności nie zachodzą lub też ich dowody są bardziej zrozumiałe w ogólnym przypadku.

Fakt 11.14. Jeśli $\text{LIN}(B) = \mathbb{V}$ to $\vec{v} \in \mathbb{V}^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v}$ jest prostopadły do każdego wektora z B .

Lemat 11.15. Niech $U \subseteq \mathbb{V}$, gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią Euklidesową (lub unitarną). Wtedy

1. $U^\perp \leq \mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową;

2. $(U^\perp)^\perp \supseteq U$;

3. $U \cap (U^\perp)^\perp \subseteq \{\vec{0}\}$;

$$\begin{aligned} & \vec{v} \in U^\perp \quad \forall \vec{u} \in U \quad \vec{v} \perp \vec{u} \\ & (\vec{u}^\perp)^\perp \quad \vec{u} \in (\vec{u}^\perp)^\perp \\ & \vec{u} \in U \cap U^\perp \quad 0 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

Lemat 11.16. Jeśli $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Euklidesowej lub unitarnej $\mathbb{V}$, to

$$\text{LIN}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)^\perp = \text{LIN}(\vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_n).$$

W szczególności, jeśli $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ to

$$\dim \mathbb{W} = k$$

$$\dim \mathbb{W}^\perp = n - k$$

$$\dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim \mathbb{V} - \dim \mathbb{W}.$$

$$\begin{matrix} j > k \\ i \leq k \end{matrix} \quad b_j \in \left(\text{LIN}(b_1, \dots, b_k) \right)^\perp$$

$$\langle b_j, b_i \rangle = 0$$

$$\text{LIN}(b_{k+1}, \dots, b_n) \subseteq \left(\text{LIN}(b_1, \dots, b_k) \right)^\perp$$

Ważne

$$u \in \text{LIN}(b_1, \dots, b_k)^\perp \setminus \text{LIN}(b_{k+1}, \dots, b_n)$$

$$\text{nie ma} \quad u = \sum \alpha_i b_i \quad i_0 \leq k \quad \alpha_{i_0} \neq 0$$

$$0 = \langle u, b_{i_0} \rangle = \alpha_{i_0}$$

$$\text{LIN}(b_1, \dots, b_k)^\perp = \text{LIN}(b_{k+1}, \dots, b_n)$$

Lemat 11.17. Niech V będzie skończenie-wymiarową przestrzenią Euklidesową (lub unitarną) oraz niech $W \leq V$. Wtedy

$$(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}.$$

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp = V$$

- dla każdego wektora $\vec{v} \in V$ reprezentacja $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}_\perp$, gdzie $\vec{w} \in \mathbb{W}$ i $\vec{w}_\perp \in \mathbb{W}^\perp$ jest jedyna.

$$\dim \mathbb{W}^\perp = n - \dim \mathbb{W}, \quad \dim (\mathbb{W}^\perp)^\perp = n - \dim \mathbb{W}^\perp = n - (n - \dim \mathbb{W}) = \dim \mathbb{W}$$

$b_1, \dots, b_n \in \text{base orthon. } V$

$b_1, \dots, b_n, \underbrace{b_{n+1}, \dots, b_n}_{\text{base } \mathbb{W}^\perp}$ base V

$\leftarrow \text{base } V$

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp = \text{LIN}(b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_n) = V$$

$$\mathbb{W} \leq V$$

$$\mathbb{W}^\perp \leq V$$

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp) = \dim \mathbb{W} + \dim(\mathbb{W}^\perp) - \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp)$$

$$= \dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^\perp - \dim \{\vec{0}\}$$

$$= n = \dim(V)$$

$v \in V \quad \exists$ dokładnie jedna repr

$$\underbrace{\omega}_{\mathbb{W}} + \underbrace{\omega_\perp}_{\mathbb{W}^\perp}$$

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp = V$$

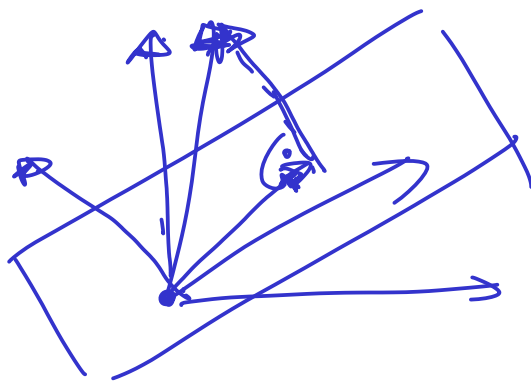
$$\{\omega + \omega_\perp\}$$

$$\omega + \omega_\perp = \omega' + \omega'_\perp$$

$$\omega - \omega' = \omega'_\perp - \omega_\perp$$

$$\vec{0} \quad \vec{0}$$

$$\omega = \omega' \quad \omega_\perp = \omega'_\perp$$



$$\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = \{\vec{0}\}$$

11.3 Rzuty i rzuty prostopadłe.

Definicja 11.18. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{V}$. Dla wektora $\vec{v} \in \mathbb{V}$ niech $\vec{w} + \vec{w}^\perp$ będzie rozkładem $\vec{v}$ na sumę elementów z $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}^\perp$.

Przyporządkowanie $\vec{v} \mapsto \vec{w}$ nazywamy rzutem prostopadłym na $\mathbb{W}$.

$$\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$$

$$P_{\mathbb{W}}(\vec{v}) = \vec{w}$$

t.z.c

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W} & & \mathbb{W}^\perp \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega & + & \omega_\perp = \vec{v} \end{array}$$

przebieganie liniowe?

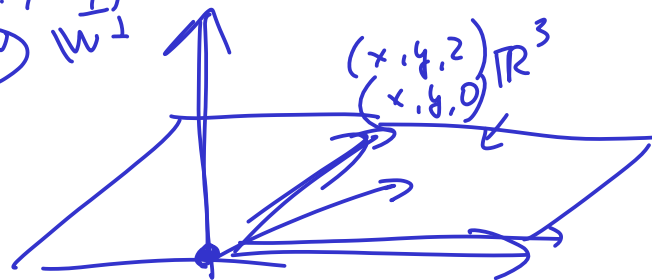
$$\begin{array}{l} P_{\mathbb{W}} : \\ \vec{v} \\ \vec{v}' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pr. liniowe} \\ \left(\begin{array}{l} \omega + \omega_\perp \\ \omega' + \omega'_\perp \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \omega + \omega' \\ \omega_\perp + \omega'_\perp \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \omega_\perp + \omega'_\perp \end{array} \right) = \vec{v} + \vec{v}' \\ \mathbb{W} \quad \mathbb{W} \end{array}$$

$$V = \overset{P_V}{\omega} + \omega_{\perp} \quad \omega_{\perp} = V - P_V$$

Fakt 11.19. Niech P_W będzie rzutem prostopadłym na W . Wtedy:

- rzut prostopadły P jest jednoznacznie określony
- $P\vec{v} \in W$
- $\vec{v} - P\vec{v} \in W^{\perp}$
- $P\vec{w} = \vec{w}$ dla $\vec{w} \in W$
- $P\vec{w} = \vec{0}$ dla $\vec{w} \in W^{\perp}$.

$$\omega \in W \quad \omega \neq \omega_{\perp}$$



Lemat 11.20. Niech V będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną) i $W \leq V$. Rzut prostopadły na W jest zdefiniowany jednoznacznie.

Niech $P : V \rightarrow V$ będzie rzutem prostopadłym na W . Jeśli $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ jest bazą ortogonalną W zaś $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ przestrzeni V , to

$$P\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{b}_i$$

$$\langle v, b_i \rangle = \alpha_i$$

$$b_1, \dots, b_n$$

$$\sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i$$

$$v \rightarrow P_W v$$

Uwaga. Zauważmy, że skoro $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ jest bazą, to to definiuje P na całej przestrzeni V .

Dowód wynika z Lematu 11.16 i Lematu 11.19.

Uwaga. Zauważmy, że z Lematu 11.20 wynika, że aby policzyć rzut prostopadły, musimy jedynie znać bazę ortonormalną W , nie jest potrzebna baza ortonormalna całej przestrzeni V .

Uwaga (Alternatywna (w pełni abstrakcyjna) definicja rzutu prostopadłego). Rzutem nazywamy przekształcenie liniowe $P : V \rightarrow V$ takie że $P^2 = P$. O rzucie P mówimy, że jest rzutem na podprzestrzeń $\text{Im } P$.

Rzut jest rzutem prostopadłym jeśli dla każdego $\vec{v}$ mamy $P(\vec{v}) \perp (\vec{v} - P(\vec{v}))$.

Łatwo sprawdzić, że nasza definicja rzutu prostopadłego jest zgodna w podaną.

$$P : V \rightarrow V$$

$$P^2 = Id$$

$$Pv \perp v - Pv$$

