

Algebra 2024/25 — Egzamin część I

Czas: 180 minut.

Wszystkie Zadania D1–D3 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce; zadania D4–D7 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punkcja: po 3 punkty. Każde Zadanie T1 – T5 należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punkcja: po 10 punktów.

Osoby zaliczające **różnice programowe**: zadania D4–D7 oraz T4, T5 czas: 90 minut.

Zadanie D1. Co to jest podprzestrzeń liniowa przestrzeni liniowej? Jaką znasz alternatywną charakteryzację podprzestrzeni liniowej? Jak jest zdefiniowana suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ podprzestrzeni liniowych? Co umiesz powiedzieć o przecięciu podprzestrzeni liniowych? Co umiesz powiedzieć o wymiarze sumy przestrzeni liniowych?

Zadanie D2. Co to znaczy, że przekształcenie jest liniowe? Jak jest zdefiniowany obraz, a jak jądro przekształcenia liniowego? Co możesz więcej powiedzieć o jądrze i obrazie (zarówno razem jak i osobno) przekształcenia liniowego?

Zadanie D3. Co to znaczy, że macierz jest odwracalna? Jakie znasz charakteryzacje tego, że macierz jest odwracalna? Podaj jawny wzór na macierz odwrotną. Jaki jest związek pomiędzy wyznacznikiem macierzy i wyznacznikiem macierzy odwrotnej? Jeśli, A i B są odwracalne i odpowiednich rozmiarów (tak, że operacje są dobrze zdefiniowane), które z poniższych macierzy są odwracalne (nie musisz uzasadniać) A^{-1} , A^t , AB , $A + B$, $(A + B)(A - B)$

Zadanie D4. Co to znaczy, że przekształcenie jest izometrią? Jakie są alternatywne charakteryzacje izometrii? Co umiesz powiedzieć o wyznaczniku izometrii? Dla jakich baz macierz izometrii wyrażona w tej bazie ma specjalne własności (i jakie to własności)?

Zadanie D5. Co to jest rząd elementu w grupie? Co to jest parzystość permutacji? Jakie znasz własności parzystości permutacji? Jak policzyć parzystość permutacji (a jak rząd permutacji) mając jej rozkład na cykle rozłączne?

Zadanie D6. Jak jest zdefiniowana funkcja Eulera φ ? Jakie są jej własności, jak ją obliczać? Co możesz powiedzieć o $\varphi(n)$ i pierścieniu $\mathbb{Z}_n$?

Zadanie D7. Co to znaczy, że wielomian jest nierozkładalny? Co umiesz powiedzieć o podzielności przez wielomian nierozkładalny? Co umiesz powiedzieć o rozkładzie na wielomiany nierozkładalne w $\mathbb{F}[x]$, gdzie $\mathbb{F}$ jest ciałem? W jakiej konstrukcji używamy wielomianu nierozkładalnego? Jakie znaczenie w tej konstrukcji ma stopień tego wielomianu?

Zadanie T1. Podaj bazy jądra i obrazu następującej macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie T2. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań nad $\mathbb{Z}_{17}$ w zależności od wartości parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_{17}$?

$$\begin{cases} 3x & -\lambda y & +5z & = & -\lambda \\ \lambda^2 x & & +2\lambda z & = & 0 \\ 5x & +2y & +3z & = & -\lambda \end{cases}.$$

Zadanie T3. Dla podanej macierzy liczb rzeczywistych oblicz wartości własne oraz ich krotności geometryczne i algebraiczne

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie T4. Dla permutacji

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 11 & 5 & 6 & 7 & 10 & 3 & 2 & 12 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$
$$\tau = (2, 3, 9, 7, 12, 5)(1, 8, 10, 11)(4, 6)$$

oblicz permutację

$$\rho = \sigma^{66} \tau^{62}.$$

Przedstaw ρ jako złożenie cykli rozłącznych. Podaj permutację odwrotną ρ^{-1} . Podaj rząd ρ, ρ^{-1} . Czy ρ, ρ^{-1} są permutacjami parzystymi?

Zadanie T5. Oblicz największy wspólny dzielnik poniższej pary wielomianów $f, g \in \mathbb{R}[x]$ o współczynnikach rzeczywistych. Przedstaw $\gcd(f, g)$ jako odpowiednią kombinację f, g .

$$f = x^6 + 2x^5 - 6x^4 + 2x^2 - 11x + 6$$
$$g = x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$$