

Algebra 2024/25 — Egzamin poprawkowy, część I

Czas: 180 minut.

Wszystkie Zadania D1–D3 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce; zadania D4–D7 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce. Punktacja: po 3 punkty. Każde Zadanie T1 – T5 należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punktacja: po 10 punktów.

Osoby zaliczające **różnice programowe**: zadania D4–D7 oraz T4, T5 czas: 90 minut.

Zadanie D1. Co to jest warstwa U podprzestrzeni liniowej W przestrzeni liniowej V ? Jakie znasz alternatywne charakterystyki warstw podprzestrzeni liniowej? Co umiesz powiedzieć o przecięciu warstw tej samej przestrzeni liniowej, a co o przecięciu warstw różnych podprzestrzeni liniowych?

Zadanie D2. Rozważmy układ równań liniowych

$$A\vec{X} = \vec{B}$$

podaj znane Ci warunki charakteryzujące, kiedy taki układ ma rozwiązanie. Co umiesz powiedzieć o zbiorze rozwiązań takiego układu?

Co więcej umiesz powiedzieć, jeśli A jest macierzą kwadratową i odwracalną? Czy zbiór rozwiązań ma wtedy prostą charakterystykę?

Jakie operacje zachowują zbiór rozwiązań?

Zadanie D3. Co to znaczy, że macierz jest symetryczna? Jakie znasz własności macierzy symetrycznych, w szczególności te związane z iloczynem skalarnym oraz z wartościami własnymi? Jeśli A, B są symetryczne, to które z macierzy są symetryczne: $A + B, AB, A^{-1}, A^T, 2A, (A + B)^2$?

Zadanie D4. Jak jest zdefiniowany standardowy iloczyn skalarny? Jakie ma własności?

Jak jest zdefiniowany uogólniony iloczyn skalarny? Jakie ma własności?

Jak można zdefiniować długość, odległość, kąt przy użyciu uogólnionego iloczynu skalarnego?

Zadanie D5. Co to znaczy, że grupa jest cykliczna? Jakie znasz własności grup cyklicznych? Jak jest zdefiniowany cykl w grupie permutacji? W grupie permutacji, co to jest rozkład na cykle rozłączne i jakie ma własności?

Zadanie D6. Zdefiniuj dzielenie (z resztą) wielomianu f przez wielomian g . Co to znaczy, że wielomian f dzieli wielomian g ? Jak jest zdefiniowany największy wspólny dzielnik wielomianów f, g ? Co umiesz powiedzieć o największym wspólnym dzielniku wielomianów (jak go obliczać, jak się wyraża, czy zawsze istnieje).

Zadanie D7. Co to jest charakterystyka ciała? Jakie są możliwe wartości charakterystyki ciała? Ile elementów może mieć ciało (skończone)? Dla ciała skończonego $\mathbb{F}$, ile elementów ma $\mathbb{F}^*$? Co umiesz powiedzieć o $\mathbb{F}^*$ (jako o grupie)?

Zadanie T1. Ile rozwiązań ma poniższe równanie nad ciałem $\mathbb{Z}_{13}$ w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$?

$$\begin{cases} 2x & -2y & -z & = & 1 \\ x & +\lambda y & +\lambda z & = & 2 \\ \lambda x & +2y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

Zadanie T2. Oblicz macierz odwrotną do macierzy (o elementach rzeczywistych)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie T3. Zortonormalizuj poniższy układ wektorów w $\mathbb{R}^4$ i rozszerz go do bazy ortonormalnej.

$$(1, -1, 1, -1)^T, (3, 1, 3, 1)^T, (3, 5, -1, 1)^T.$$

Zadanie T4. Układamy naszyjniki składające się z 6 kamieni, kamienie są dwustronne, każda ze stron może być biała lub czarna. Naszyjniki są nierozróżnialne, jeśli można jeden przekształcić na drugi przez obracanie i „przekładanie na drugą stronę”. Naszyjniki są dwustronne, tj. przy rozróżnianiu naszyjników bierzemy pod uwagę zarówno jedną jak i drugą stronę.

Przykładowym naszyjnikiem jest naszyjnik z jednej strony cały biały, a z drugiej cały czarny. Jest on nierozróżnialny od naszyjnika z jednej strony całego czarnego, a z drugiej całego białego.

Ile rozróżnialnych naszyjników możemy zbudować?

Zadanie T5. Przeprowadź następujące obliczenia modulo 5, 7 oraz 35. a^{-b} oznacza liczbę odwrotną do a^b (w odpowiednim $\mathbb{Z}_n$),

$$356^{-241} \cdot 729^{363} + 704^{129} - 79^{194} \cdot 114^{182} + 113^{-350} \cdot 183^{110} + 215^{372} \cdot 357^{125}.$$