Algorytmy online: lista 7

Zadanie 1. **(4 pkt.)** Rozważmy wariant ułamkowy problemu kupowania nart: w każdym dniu algorytm wybiera jaki ułamek nart $x \in [0,1]$ chce posiadać. Wartość x można tylko zwiększać, tj. nie można nart (częściowo) odsprzedawać. Następujący program liniowy $(\mathcal{P}_k)$ opisuje ten problem po k dniach, gdzie z_j jest ułamkiem nart, który pożyczymy dnia j.

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj: } & B \cdot x + \sum_{j=1}^{k} z_j & \\ \text{przy warunkach: } & x + z_j \geq 1 & \text{dla każdego dnia } j \leq k \\ & x \geq 0, \;\; z_j \geq 0 & \end{aligned}$$

Zauważmy, że program dualny wygląda następująco $(\mathcal{D}_k)$:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizuj: } & \sum_{j=1}^{k} y_j & \\ \text{przy warunkach: } & \sum_{j=1}^{k} y_j \leq B & \\ & 0 \leq y_j \leq 1 & \text{dla każdego dnia } j \leq k \end{aligned}$$

Rozważmy następujący algorytm dla tego problemu. Początkowo ustalamy $x = 0$. W dniu k, jeśli $x \geq 1$, wykonujemy przypisania

$$z_k \leftarrow 0 \;\;, \qquad y_k \leftarrow 0 \;\;,$$

zaś w przeciwnym przypadku $(x < 1)$ przypisania

$$z_k \leftarrow 1 - x \;\;, \qquad x \leftarrow (1 + 1/B) \cdot x + c \;\;, \qquad y_k \leftarrow 1 \;\; .$$

gdzie c jest pewną stałą. Jakie może być c, żeby generowane rozwiązania dla $(\mathcal{P}_k)$ i $(\mathcal{D}_k)$ były dopuszczalne? Jak współczynnik (ścisłej) konkurencyjności rozwiązania zależy od c? Pokaż, że można tak dobrać c, żeby współczynnik był równy

$$R = \frac{(1 + 1/B)^B}{(1 + 1/B)^B - 1} \;\; .$$

Zadanie 2. **(2 pkt.)** Rozważmy następujące losowe zaokrąglenie podejścia opisanego w poprzednim zadaniu. Na początku algorytm wybiera losowo liczbę $\alpha \in [0,1]$. Następnie symuluje algorytm ułamkowy i w kroku, w którym nowo obliczona wartość x wynosi co najmniej α, kupuje narty. Pokaż, że konkurencyjność takiego algorytmu jest nie większa niż konkurencyjność rozwiązania ułamkowego.

Zadanie 3. **(2 pkt.)** Rozważ algorytm dla ułamkowego wariantu problemu pokrywania zbiorami, który w każdym kroku aktualizuje obecne rozwiązanie zachłannie minimalizując przyrost kosztu. Pokaż dolne ograniczenie $\Omega(n)$ na ścisłą konkurencyjność takiego algorytmu, gdzie n jest liczbą elementów uniwersum.

Zadanie 4. **(2 pkt.)** Rozważmy program prymalny i dualny (z wykładu) dla ułamkowego wariantu problemu pokrywania zbiorami. Nie korzystając ze słabego twierdzenia o dualności pokaż, że wartość dowolnego rozwiązania dla programu prymalnego jest co najmniej taka jak wartość dowolnego rozwiązania programu dualnego.[1]

Marcin Bieńkowski

[1] Rozwiązaniem tego zadania jest dowód słabego twierdzenia o dualności, ale wykorzystujący konkretne zmienne i nierówności z problemu pokrywania zbiorami.