

Algorytmy online: lista 9

Zadanie 1 (1 pkt.) Załóżmy, że mamy deterministyczny algorytm, który jest γ -konkurencyjny dla problemu szeregowania zadań na identycznych maszynach. Pokaż, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ można skonstruować deterministyczny algorytm, który jest ściśle $(\gamma + \epsilon)$ -konkurencyjny.

Zadanie 2 (2 pkt.) Dla dowolnych dwóch punktów x i y na prostej przez $x \preceq y$ oznaczamy, że x leży na lewo od y lub w tym samym miejscu co y . Ustalmy dowolną pozycję punktów $a_1 \preceq a_2 \preceq \dots \preceq a_k$ i $o_1 \preceq o_2 \preceq \dots \preceq o_k$. Załóżmy, że dla pewnych i oraz j zachodzi $a_j \preceq o_i \preceq a_{j+1}$. Pokaż, że istnieje doskonałe skojarzenie o minimalnej wadze między zbiorami $\{a_i\}_i$ i $\{o_i\}_i$, takie, że o_i jest skojarzony albo z a_j albo z a_{j+1} .

Zadanie 3. (2 pkt.) Rozważmy problem k serwisantów na okręgu, tzn. przestrzeń, w której występują odwołania jest okręgiem, a odległość między dwoma punktami okręgu jest najkrótszą odległością liczoną wzdłuż okręgu. Rozważmy następujący randomizowany algorytm CIRC:

Na początku sekwencji wejściowej wybierz losowo jeden punkt P z okręgu. P jest barierą, która dzieli okrąg na odcinek (o początku i końcu w punkcie P). Następnie do obsługi żądań CIRC uruchamia algorytm DOUBLE COVERAGE na tym odcinku (tj. nigdy nie przekracza punktu P).

Pokaż, że CIRC jest $2k$ -konkurencyjny.

Zadanie 4. (3 pkt.) Rozważmy następujący algorytm rozwiązujący problem 2 serwisantów na płaszczyźnie euklidesowej. Aby obsłużyć żądanie w punkcie r , algorytm wykonuje następujące kroki:

- a) Niech x będzie serwisantem bliższym r zaś y dalszym (remisy rozstrzygamy dowolnie).
- b) Przesuń y o $\frac{1}{2} \cdot (d(x, r) + d(x, y) - d(y, r))$ w stronę x .¹
- c) Przesuń x do r .

Pokaż że powyższy algorytm jest $O(1)$ -konkurencyjny. *Wskazówka: wykorzystaj funkcję potencjału podobną do tej wykorzystywanej w algorytmie DOUBLE COVERAGE.*

Zadanie 5. (2 pkt.) Rozważmy graf czterowierzchołkowy będący kwadratem o równych długościach krawędzi. Rozważmy następujący algorytm randomizowany ALG dla problemu dwóch serwisantów w tym grafie. ALG rozpoczyna z serwisantami w dwóch różnych wierzchołkach. Aby obsłużyć żądanie w punkcie r :

- a) jeśli ALG ma serwisanta w r , to nic nie robi;
- b) w przeciwnym przypadku do r przesuwany jest ten z serwisantów, który jest bliższy r ;
- c) jeśli obaj serwisanci mają taką samą odległość do r , to serwisant do przesunięcia wybierany jest przez rzut monetą.

Pokaż, że ALG jest $O(1)$ -konkurencyjny. Jakie jest najlepsze ograniczenie jakie potrafisz podać?

Marcin Bienkowski

¹Na prostej algorytm zachowuje się jak DOUBLE COVERAGE.