

Algorytmy online: lista 10

Zadanie 1. (2 pkt.) Pokaż, że konkurencyjność dowolnego algorytmu deterministycznego DET dla problemu przenoszenia pliku wynosi co najmniej 3. *Wskazówka: rozważ graf dwuwierzchołkowy i porównaj DET z trzema algorytmami (dwa statyczne i jeden, który ma plik w innym wierzchołku niż DET).*

Zadanie 2. (2 pkt.) Rozważ następujący algorytm CNT_k parametryzowany pewną liczbą całkowitą k . Na początku działania CNT_k losuje wartość licznika C jednostajnie ze zbioru $\{1, \dots, k\}$. W każdym kroku, po obsłudze żądania, CNT_k zmniejsza C o 1 i jeśli następnie $C = 0$, to plik jest przenoszony do miejsca żądania, zaś C jest zmieniane na k .

Pokaż, że dla dowolnego k konkurencyjność algorytmu CNT_k wynosi co najwyżej

$$\max \left\{ 2 + \frac{2D}{k}, 1 + \frac{k}{2D} \right\} + O(1/D) .$$

gdzie D jest rozmiarem pliku. Zakładając, że $D \rightarrow \infty$ i nie musisz się przejmować całkowitością k , oblicz jakie jest k optymalizujące powyższe maksimum i ile wynosi wtedy konkurencyjność CNT_k . *Wskazówka: wykorzystaj funkcję potencjału $\Phi = (C + D) \cdot d(\text{CNT}_k, \text{OPT})$.*

Zadanie 3. (2 pkt.) Rozważmy następujące uogólnienie algorytmu FLIP dla problemu przenoszenia pliku: algorytm $\text{FLIP}(p)$ przenosi plik do żądania z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1]$. (Oryginalny algorytm FLIP wybierał $p = 1/(2D)$). Ustalmy graf, który składa się z dwóch wierzchołków połączonych krawędzią. Pokaż, że dla dowolnego p konkurencyjność algorytmu $\text{FLIP}(p)$ na tym grafie wynosi co najmniej 3.

Zadanie 4. Na odwrocie znajdziesz program liniowy, zapisz go do pliku `lower.lp`. Przeczytaj jego zawartość zwracając uwagę na trzy wyróżnione nierówności: dlaczego są one prawdziwe? Uruchom polecenie `lp_solve < lower.lp`.¹

- a) (2 pkt.) Na podstawie wyniku narysuj i opisz, jak wygląda faza dla której zachodzi $\text{ALG} + \Delta\Phi = 7 \cdot \text{OPT}$, gdzie $\Phi = 2 \cdot D \cdot d(\text{ALG}, \text{OPT})$. Uwaga: prawdopodobnie żądania nie mogą być skupione w jednym miejscu `req`, ten punkt odpowiada tylko ich „środkowi masy”.
- b) (2 pkt.) Zauważ, że powyższy wynik nie prowadzi łatwo do prawdziwego dolnego ograniczenia, bo odległość $d(\text{ALG}, \text{OPT})$ jest inna na początku i na końcu fazy. Dodaj odpowiednią równość, żeby to wymusić, wykonaj ponownie program i rozwiąż ponownie poprzedni podpunkt. Jak z obecnej konstrukcji wynika dolne ograniczenie 7 na konkurencyjność algorytmu `Move-To-Min`?

Marcin Bienkowski

¹Program `lp_solve` to darmowy solver LP dostępny w większości popularnych systemów operacyjnych. Jeśli w wyniku otrzymasz inne wartości niż `potential_start = 0` i `potential_end = 4`, to wymuś je przez odkomentowanie odpowiednich wierszy.

/*

Generowanie metryki wymuszającej największy współczynnik dla jednej fazy algorytmu Move-To-Min dla problemu File migration i konkretnej funkcji potencjału równej $2 * D * \text{dist}(\text{ALG}, \text{OPT})$.

Mamy dane punkty alg0 , alg1 , opt0 i opt1 (pozycje ALG i OPT na początku i końcu). Zmienne w programie to głównie $D_{x,y}$, oznaczające odległość między punktami x i y , pomnożoną przez D . Dodatkowo D_{req_x} oznacza sumę odległości od punktu x do wszystkich żądań z danej fazy.

UWAGA: Wartość ratio jest GÓRNYM ograniczeniem, tj. jeśli program zwróci $\text{ratio} = 7$, to oznacza, że faktyczna konkurencyjność wynosi co najwyżej 7. Ale nie na odwrót: program może wygenerować układ punktów, który NIE JEST MOŻLIWY DO ZAIMPLEMENTOWANIA jako prawdziwa faza.

*/

```
max: ratio;
```

```
ratio = alg_cost + potential_end - potential_start;
```

```
alg_cost = D_req_alg0 + D_alg0_alg1;
```

```
opt_cost = 1;
```

```
opt_cost >= D_req_opt0;
```

```
// Lemat ograniczający koszt OPT zastosowany do opt0
```

```
opt_cost >= D_req_opt1;
```

```
// Lemat ograniczający koszt OPT zastosowany do opt1
```

```
opt_cost >= D_opt0_opt1;
```

```
potential_start = 2 D_alg0_opt0;
```

```
potential_end = 2 D_alg1_opt1;
```

```
// Odkomentuj, jeśli masz za dużo szczęścia:
```

```
// potential_start = 0;
```

```
// potential_end = 4;
```

```
// Jakie jest znaczenie tych trzech nierówności?
```

```
D_req_alg1 <= D_req_alg0;
```

```
D_req_alg1 <= D_req_opt0;
```

```
D_req_alg1 <= D_req_opt1;
```

```
// Nierówności trójkąta.
```

```
D_req_alg0 <= D_req_alg1 + D_alg0_alg1;
```

```
D_req_alg0 <= D_req_opt0 + D_alg0_opt0;
```

```
D_req_alg0 <= D_req_opt1 + D_alg0_opt1;
```

```
D_req_alg1 <= D_req_alg0 + D_alg0_alg1;
```

```
D_req_alg1 <= D_req_opt0 + D_alg1_opt0;
```

```
D_req_alg1 <= D_req_opt1 + D_alg1_opt1;
```

```
D_req_opt0 <= D_req_alg0 + D_alg0_opt0;
```

```
D_req_opt0 <= D_req_alg1 + D_alg1_opt0;
```

```
D_req_opt0 <= D_req_opt1 + D_opt0_opt1;
```

```
D_req_opt1 <= D_req_alg0 + D_alg0_opt1;
```

```
D_req_opt1 <= D_req_alg1 + D_alg1_opt1;
```

```
D_req_opt1 <= D_req_opt0 + D_opt0_opt1;
```

```
D_alg0_alg1 <= D_req_alg0 + D_req_alg1;
```

```
D_alg0_alg1 <= D_alg0_opt0 + D_alg1_opt0;
```

```
D_alg0_alg1 <= D_alg0_opt1 + D_alg1_opt1;
```

```
D_alg0_opt0 <= D_req_alg0 + D_req_opt0;
```

```
D_alg0_opt0 <= D_alg0_alg1 + D_alg1_opt0;
```

```
D_alg0_opt0 <= D_alg0_opt1 + D_opt0_opt1;
```

```
D_alg0_opt1 <= D_req_alg0 + D_req_opt1;
```

```
D_alg0_opt1 <= D_alg0_alg1 + D_alg1_opt1;
```

```
D_alg0_opt1 <= D_alg0_opt0 + D_opt0_opt1;
```

```
D_alg1_opt0 <= D_req_alg1 + D_req_opt0;
```

```
D_alg1_opt0 <= D_alg0_alg1 + D_alg0_opt0;
```

```
D_alg1_opt0 <= D_alg1_opt1 + D_opt0_opt1;
```

```
D_alg1_opt1 <= D_req_alg1 + D_req_opt1;
```

```
D_alg1_opt1 <= D_alg0_alg1 + D_alg0_opt1;
```

```
D_alg1_opt1 <= D_alg1_opt0 + D_opt0_opt1;  
D_opt0_opt1 <= D_req_opt0 + D_req_opt1;  
D_opt0_opt1 <= D_alg0_opt0 + D_alg0_opt1;  
D_opt0_opt1 <= D_alg1_opt0 + D_alg1_opt1;
```