

# Lista 1

**Zadanie 1.** Sprawdź, czy następujące podzbiory  $\mathbb{R}^n$  są podprzestrzeniami liniowymi:

1.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 5a + 2b = 0\}$
2.  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3.  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 1\}$
6.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 0\}$
7.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 1\}$
8.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
9.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

**Zadanie 2.** Niech  $\mathbb{V}$  — przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{F}$  oraz  $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$  będą jej podprzestrzeniami.

Pokaż, że  $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$  jest najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą  $\mathbb{W}$  i  $\mathbb{W}'$ .

**Zadanie 3.** Niech  $\mathbb{V}$  — przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{F}$  oraz  $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{V}$  dla  $i \in I$  będą jej podprzestrzeniami. Pokaż, że  $\bigcap_{i \in I} \mathbb{W}_i$  jest największą przestrzenią liniową zawartą w każdej z  $\mathbb{W}_i$ .

**Zadanie 4.** Pokaż, że dla przestrzeni liniowych  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$  nad tym samym ciałem  $\mathbb{F}$ , iloczyn kartezjański  $\prod_{i=1}^k \mathbb{V}_i$  z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{F}$ .

**Zadanie 5.** Niech  $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ . Udowodnij zawieranie:

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} \cap (\mathbb{W} + \mathbb{W}')$$

Pokaż, że jeśli  $\mathbb{W} \leq \mathbb{U}$  to zachodzi równość obu stron powyższego zawierania.

**Zadanie 6.** Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{Z}_3^3$  (zbiór trzelementowych ciągów elementów z  $\mathbb{Z}_3$ , nad ciałem  $\mathbb{Z}_3$ ). Ile wektorów należy do  $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$ ? A ile do  $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$ ?

**Zadanie 7.** Pokaż następujące fakty wprost z definicji, tj. rozpisując odpowiednie kombinacje liniowe:

- Niech  $\mathbb{V}$  będzie przestrzenią liniową,  $U \subseteq \mathbb{V}$  układem wektorów. Wtedy:

$$\text{LIN}(U) = \text{LIN}(\text{LIN}(U)) .$$

- Niech  $\mathbb{V}$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{F}$ , zaś  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$  wektorami z tego ciała. Jeśli skalary  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  są niezerowe to

$$\text{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \text{LIN}(\alpha_1 \vec{v}_1, \dots, \alpha_k \vec{v}_k).$$

- Dla  $i \neq j$  oraz skalaru  $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\text{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \text{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k).$$

**Zadanie 8 (\* Nie liczy się do podstawy).** Niech  $M$  będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów  $2^M$  określamy operacje:

$$U + U' := U \Delta U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie  $\Delta$  oznacza różnicę symetryczną, tj.  $U \Delta U' = (U \setminus U') \cup (U' \setminus U)$ . Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{Z}_2$ .

**Zadanie 9.** Przedstaw wektor  $\vec{W}$  jako kombinację liniową podanych wektorów  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k$  (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem  $\mathbb{R}$ :

1.  $\vec{W} = (1, 5)$ ,  $\vec{V}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{V}_2 = (2, 0)$ .
2.  $\vec{W} = (5, 10, 11)$ ,  $\vec{V}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{V}_2 = (0, 3, 2)$ ,  $\vec{V}_3 = (1, 1, 1)$ .
3.  $\vec{W} = (5, 10, 11)$ ,  $\vec{V}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{V}_2 = (0, 3, 2)$ ,  $\vec{V}_3 = (1, 8, 7)$ .
4.  $\vec{W} = (4, 17, 18)$ ,  $\vec{V}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{V}_2 = (0, 3, 2)$ ,  $\vec{V}_3 = (3, 9, 11)$ .

**Zadanie 10.** Niech  $\mathbb{V}$ , przestrzeń liniowa nad ciałem  $\mathbb{F}$ ,  $U = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  będzie układem wektorów z  $\mathbb{V}$ , zaś  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  ciąg skalarów, takich że  $\alpha_1 \neq 0$ . Pokaż, że

$$\text{LIN} \left( \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_2, \dots, v_k \right\} \right) = \text{LIN} (\{v_1, v_2, \dots, v_k\}).$$

**Zadanie 11.** Pokaż równoważność następujących warunków (dla  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{V}$ ):

1. Układ  $B$  jest liniowo niezależny.
2. Wektor  $\vec{0}$  ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru  $B$ .
3. Pewien wektor z  $\text{LIN}(B)$  ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru  $B$ .
4. Każdy wektor z  $\text{LIN}(B)$  ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z  $B$ .

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.