Lista 8

Zadanie 1 (* Nie liczy się do podstawy). Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B, które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie skorzystaj z reprezentacji macierzy jako iloczynu macierzy elementarnych i macierzy przekątniowej.

Zadanie 2. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

Wskazówka: $\det(A) = \det(A^T)$, $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A^T)$.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy M, to suma (mnogościowa) baz przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Wskazówka: Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

Zadanie 4. Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

Zadanie 5. Rozważmy macierz kwadratową M wymiaru $n \times n$ oraz jej wielomian charakterystyczny $\varphi_M(x) = \det(M - x\,\mathrm{Id})$. Udowodnij, że:

- współczynnik $\varphi_M(x)$ przy x^n wynosi $(-1)^n$;
- współczynnik $\varphi_M(x)$ przy x^0 wynosi $\det(M)$.

Zadanie 6 (Klatka Jordana). *Klatka Jordana* wymiaru $n \times n$ to macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że ma ona dokładnie jedną wartość własną λ o krotności algebraicznej n oraz krotności geometrycznej 1.

Zadanie 7. Dla wielomianu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ możemy zdefiniować naturalnie wartość tego wielomianu na macierzy kwadratowej, jako $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{k} a_i M^i$, gdzie $M^0 = \mathrm{Id}$.

Niech $M = AJA^{-1}$, gdzie J jest macierzą Jordana (tzn. na przekątnej ma klatki Jordana), zaś φ_M jej wielomianem charakterystycznym. Celem tego zadania jest pokazanie, że $\varphi_M(M)$ jest macierzą zerową.

(W pełnej ogólności to zadanie powinno mówić, że A, J są macierzami nad $\mathbb{C}$, ale w zasadzie nic nie zmienia to w dowodzie: wystarczy, że pokażesz to dla $\mathbb{R}$.)

Możesz pokazać to wg. następującego schematu.

- Pokaż tezę dla M będącej klatką Jordana.
- Pokaż, że dla macierzy Jordana J i wielomianu $p(x)$ mamy

$$p\left(\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_k) \end{bmatrix}$$

- Pokaż, że jeśli $p(x) = q(x)r(x)$ to $p(M) = q(M)r(M)$.
- Pokaż, że dla macierzy Jordana J mamy $\varphi_J(J) = 0$.
- Pokaż, że dla macierzy A, M oraz wielomianu $p(x)$ mamy $p(A^{-1}MA) = A^{-1}p(M)A$.

Zadanie 8. Niech w będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokaż, że dla liczby zespolonej α mamy $w(\overline{\alpha}) = \overline{w(\alpha)}$ (gdzie $\bar{\cdot}$ to sprzężenie).

Wywnioskuj z tego, że jeśli w ma pierwiastek zespolony β, to $\overline{\beta}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Wywnioskuj z tego, że jeśli macierz o współczynnikach rzeczywistych (traktowana jako macierz o współczynnikach zespolonych) ma zespoloną wartość własną β, to ma też wartość własną $\overline{\beta}$.

Udowodnij, że w tym przypadku, jeśli wektor o współczynnikach zespolonych $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T$ jest wektorem własnym dla zespolonej wartości własnej β, to $\overline{\vec{V}} = [\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n]^T$ jest wektorem własnym dla zespolonej wartości własnej $\overline{\beta}$.

Zadanie 9. Pokaż, że:

- suma macierzy symetrycznych jest macierzą symetryczną;
- iloczyn macierzy symetrycznych A, B jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$.

Zadanie 10. Niech M będzie symetryczną macierzą 2×2 nad liczbami rzeczywistymi. Pokaż, M ma dwa niezależne wektory własne.

Wskazówka: Wystarczy wprost policzyć wielomian charakterystyczny.

Zadanie 11. Mówimy, że macierz liczb rzeczywistych $(m_{i,j})_{i,j=1,\ldots n}$ jest dodatnia, jeśli $m_{i,j} > 0$ dla $1 \leq i, j \leq n$.

Niech A, B będą tego samego rozmiaru i obie dodatnie, niech też $\alpha > 0$. Pokaż, że $A + B, \alpha A, AB$ też są dodatnie.