# Lista 2

**Zadanie 1.** Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ układy wektorów

- $\{\alpha\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2\}$
- $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_4, \ldots, \vec{v}_{n-1} + \vec{v}_n, \vec{v}_n + \alpha\vec{v}_1\}$

są liniowo niezależne?

**Zadanie 2.** Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)? Rozszerz ich (dowolny) maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1. $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)$;
2. $(0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 1)$;
3. $(1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$;
4. $(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)$.

**Zadanie 3.** Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1)$;
- $(2, 3, -4, -1), (1, -2, 1, 3)$;
- $(2, 3, 5, -4, 1), (1, -1, 2, 3, 5)$.

**Zadanie 4.** Rozpatrzmy ponownie przestrzeń liniową z Zadania 8 z Listy 1, tj. na zbiorze podzbiorów $2^M$ skończonego zbioru $M$ określamy operacje:

$$U + U' := U \triangle U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną.

Podaj (naturalną) bazę tej przestrzeni liniowej. Czy potrafisz naturalnie zinterpretować izomorfizm zadany przez wyrażanie w tej bazie?

**Zadanie 5.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $B$ jego *nieskończoną* bazą.

Pokaż, że $\mathbb{V}$ jest izomorficzna ze zbiorem funkcji z $B$ w $\mathbb{F}$ o skończenie wielu argumentach, dla których przyjmują niezerową wartość, tj. z przestrzenią:

$$\{f : B \to \mathbb{F} \ : \ \{b : f(b) \neq 0\} \text{ jest skończony}\} \ .$$

**Zadanie 6.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, skończenie wymiarową a $A \subseteq \mathbb{V}$: układem liniowo niezależnym, $|A| = |B|$, gdzie $B$ jest pewną bazą $\mathbb{V}$.

Pokaż, że $A$ też jest bazą.

*Wskazówka:* Spróbuj rozszerzyć $A$ o kolejne wektory z $B$ ustalonej bazy. Co możesz powiedzieć o końcowym zbiorze?

**Zadanie 7.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią skończenie wymiarową. Pokaż, że: Każdy niezależny układ wektorów $A \subseteq \mathbb{V}$ można rozszerzyć do bazy $\mathbb{V}$.

Zalecane jest skorzystanie z Lematu Steinitza.

*Wskazówka:* Indukcja w dół po mocy $A$.

**Zadanie 8.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią skończenie wymiarową. Pokaż, że: Z każdego układu wektorów $A \subseteq \mathbb{V}$ można wybrać bazę przestrzeni $\mathrm{LIN}(A)$.

**Zadanie 9.** Wyraź w bazie $B = \{(1, 2, 3); (0, 1, 2); (0, 0, 1)\}$ wektory

- $(1, 0, 0)$
- $(0, 1, 0)$
- $(0, 0, 1)$
- $(7, 3, 2)$

**Zadanie 10.** Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi. Pokaż, że $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ lub $\dim(\mathbb{V}) > \dim(\mathbb{W})$.

**Zadanie 11** (* Nie liczy się do podstawy.). *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:

Jeśli $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, to zbiór liczący $k+1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+1}$ w bazie $B$ i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.