Lista 3

Zadanie 1. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{W}, \mathbb{W}', \mathbb{W}'' \leq \mathbb{V}$.

Udowodnij, że

$$\dim((\mathbb{W} + \mathbb{W}') \cap \mathbb{W}'') + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') = \dim((\mathbb{W}' + \mathbb{W}'') \cap \mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}' \cap \mathbb{W}'')$$

Zadanie 3. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

$$S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\},\ T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\} \ .$$

Zadanie 4. Dane są dwa układy wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ (nad ciałem $\mathbb{R}$): $S = \left\{\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 5 & -2 & 4 & -1\end{pmatrix}\right\}$ i $T = \left\{\begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & -3 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -3 & 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right\}$. Ile wynoszą wymiary $\mathrm{LIN}(S \cup T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$? Podaj dowolną bazę $\mathrm{LIN}(S \cup T)$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zachodzi $U = \vec{u} + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U - \vec{u} \leq \mathbb{V}$;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U - \vec{u} \leq \mathbb{V}$;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zbiór $U - \vec{u} \leq \mathbb{V}$.

Zadanie 6. Dla podanych warstw U przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz wektorów $\vec{V}$ określ, czy $\vec{V} \in U$. Odpowiedzi uzasadnij.

(a) $U = [1, 3, 2] + \mathrm{LIN}([2, 1, 5], [2, 0, 1])$, $\vec{V} = [3, 6, 15]$
(b) $U = [1, 3, 2] + \mathrm{LIN}([2, 1, 5], [2, 0, 1])$, $\vec{V} = [4, 6, 16]$
(c) $U = [1, 0, 1] + \mathrm{LIN}([1, 1, 1], [3, -1, -4])$, $\vec{V} = [-4, 7, 17]$
(d) $U = [1, 0, 1] + \mathrm{LIN}([1, 1, 1], [3, -1, -4])$, $\vec{V} = [-8, 14, 34]$

Zadanie 7. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Pokaż, że $\vec{u}, \vec{v}$ należą do tej samej warstwy U wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{u} - \vec{v} \in \mathbb{W}$.

Korzystając z tej własności pokaż, że zbiór ciągów spełniających równanie rekurencyjne (dla każdego $n \geq 2$)

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + p(n)$$

dla pewnego wielomianu p jest warstwą przestrzeni ciągów spełniających równanie rekurencyjne (dla $n \geq 2$):

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Zadanie 8. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x, y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$,
- $L'(x, y, z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$,
- $L''(x, y, z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$.

Zadanie 9 (* Nie liczy się do podstawy, choć nie jest takie trudne). Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora $\vec{v}$.

Udowodnij uogólnienie tego faktu:
Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(\vec{v}) = \vec{0}$ dla dowolnego wektora $\vec{v}$, to zachodzi również $L^n(\vec{v}) = \vec{0}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $\vec{v}, L(\vec{v}), L^2(\vec{v}), \ldots, L^n(\vec{v})$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 10. Wyznacz bazy obrazu i jądra dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Dla obrazu: skorzystaj z faktu: jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{V}$ to $\mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k)) = \operatorname{Im} F$. Dla jądra: ułóż odpowiedni układ równań.

Zadanie 11. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} \quad ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\operatorname{Im} F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.