Lista 4

Zadanie 1. Niech $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ będą ustalonymi przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, niech $\dim \mathbb{V} = n$, $\dim \mathbb{W} = m$. Pokaż, że dla dowolnych baz $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ oraz $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ (odpowiednio $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$) przekształcenia liniowe $\{L_{i,j}\}_{\substack{i=1\ldots,n \\ j=1\ldots m}}$ zdefiniowane jako

$$L_{i,j}(\vec{v}_k) = \begin{cases} \vec{w}_j & \text{jeśli } k = i \\ \vec{0} & \text{jeśli } k \neq i \end{cases}$$

są bazą przestrzeni liniowej przekształceń liniowych z $\mathbb{V}$ w $\mathbb{W}$.

Wywnioskuj z tego, że wymiar przestrzeni przekształceń liniowych z $\mathbb{V}$ w $\mathbb{W}$ wynosi $m \cdot n$.

Wskazówka: "Zerem" wśród przekształceń liniowych jest przekształcenie, które przypisuje każdemu wektorowi $\vec{0}$.

Zadanie 2. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} &= B \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B &= A \cdot (\alpha B) \\ A[B|C] &= [AB|AC] \\ \left[\frac{B}{C}\right] A &= \left[\frac{BA}{CA}\right] \end{aligned}$$

Wskazówka: Bezpośrednio z definicji, pomocne może być korzystanie z liniowości, gdy już ją udowodnisz.

Zadanie 3. Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Pokaż, że:

- $\ker(L_M) \subseteq \ker(L_{M^2})$, gdzie L_M to przekształcenie $v \mapsto Mv$, analogicznie L_{M^2}.
- $\mathrm{rk}(M + M^2) \leq \mathrm{rk}(M)$ (*wskazówka*: Patrz poprzedni punkt.)

Zadanie 4. Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \quad .$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależności:

$$f_{n+k} = f_{k-1} f_n + f_k f_{n+1} = f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n.$$

Zadanie 5. Pokaż, że mnożenie macierzy jest łączne.

Wskazówka: Możesz korzystać bezpośrednio z definicji oraz z Zadania 3.

Zadanie 6. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową. Pokaż też, że dla takich macierzy (tj. kwadratowych spełniających $AB = BA$) zachodzi

$$(A + B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i} \quad .$$

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

Zadanie 7. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n .$$

Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp.

Wskazówka: Pomocne może być przedstawienie macierzy jako $\alpha \operatorname{Id} + J$, gdzie $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$. Skorzystaj z Zadania 6.

Zadanie 8. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 9. Pokaż, że dla macierzy A, B odpowiednich rozmiarów zachodzi

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \ ,$$
$$(A^T)^T = A \ ,$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T \ .$$

Zadanie 10 (* nie liczy się do podstawy; niezbyt trudne)**.** Niech M będzie macierzą kwadratową zadaną jako

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} ,$$

dla pewnej λ. Podaj zwartą postać macierzy M^k dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Wskazówka: Przedstaw $M = \lambda \operatorname{Id} + J$, skorzystaj z Zadania 6. Ile wynosi $J\vec{E}_i$?

Zadanie 11. Niech M, N będą macierzami górnotrójkątnymi. Pokaż, że:

- ich suma $M + N$ też jest macierzą górnotrójkątną;
- ich iloczyn też jest macierzą górnotrójkątną.

Pokaż też analogiczną własność macierzy dolnotrójkątnych.