Lista 5

Zadanie 1. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 2 (* Nie liczy się do podstawy)**.** Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.

Pokaż, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy przekątniowej (może ona mieć zera na przekątnej).

Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że używając eliminacji Gaussa na kolumnach można sprowadzić macierz do macierzy schodkowej. Zastosuje wtedy operacje wierszowe. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje.

Zadanie 3. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 4. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^T jest odwracalna i zachodzi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i zachodzi $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 5. Niech M będzie odwracalną macierzą górnotrójkątną. Pokaż, że macierz odwrotna do M jest macierzą górnotrójkątną.

Zadanie 6 (Ślad macierzy)**.** *Śladem* macierzy kwadratowej jest suma elementów na jej przekątnej, tj.

$$\mathrm{tr}\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Pokaż, że:

- $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$;
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Zadanie 7. Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 8. Niech M będzie odwracalną macierzą symetryczną/diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest symetryczna/diagonalna.

(Macierz M jest symetryczna, jeśli $M^T = M$.)

Zadanie 9. Znajdź wszystkie macierze A wymiaru 2×2 spełniające warunek $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że $\mathrm{rk}(A) = 2$ implikuje $\mathrm{rk}(A^2) = 2$. Potem rozpatrz możliwe $\mathrm{rk}(A)$.

Zadanie 10. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopnia najwyżej 3. Rozważmy bazę x^0, x^1, x^2, x^3 tej przestrzeni i przekształcenie $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w tej bazie.

Zadanie 11. Podaj macierze zmiany bazy pomiędzy każdą z par poniższych baz:

- baza standardowa w $\mathbb{R}^3$;
- $[1, 1, 1]^T, [1, 1, 0]^T, [1, 0, 0]^T$;
- $[1, 1, -1]^T, [1, -1, 1]^T, [-1, 1, 1]^T$.