

# Lista 7

**Zadanie 1.** Pokaż, że układ równań uzyskany przez

- zamianę  $i$ -tego oraz  $j$ -tego równania
- dodanie do  $j$ -tego równania wielokrotności  $i$ -tego
- przemnożenie  $i$ -tego równania przez skalar  $\alpha \neq 0$
- usunięcie trywialnego równania  $\sum_i 0 \cdot x_i = 0$

jest równoważny wyjściowemu.

Pokaż też, że jeśli macierz  $A'$  uzyskamy z macierzy  $A$  poprzez elementarne operacje wierszowe, to  $\ker A = \ker A'$ .

*Wskazówka:* Można na palcach, ale prościej jest zinterpretować (wszystkie poza ostatnią) jako wierszowe operacje elementarne, które są odwracalne.

**Zadanie 2** (\* nie liczy się do podstawy). Niech  $A$  będzie macierzą w postaci schodkowej (wierszowo) i niech każdy element wiodący w wierszu będzie równy 1. Wykonaj operacje wierszowe, tak by te elementy wiodące były jedyne w kolumnie, uzyskując macierz  $A'$ . Jak wygląda baza jądra tak uzyskanej macierzy  $A'$  — wystarczy, jeśli umiesz odpowiedzieć na to pytanie, a nie bardzo rozumiesz, po co i jak robi się  $A'$ .

*Wskazówka:* Odpowiedz „rozwiązując układ równań” nie jest właściwa. Można zasadić wprost albo użyć algorytmu obliczania bazy jądra.

**Zadanie 3.** Dla jakich wartości  $p$  podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?

$$\begin{cases} 5x_1 + px_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ px_1 + px_2 + 2x_3 = 2 + p \end{cases}.$$

**Zadanie 4.** Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru  $\lambda$ ? Układ jest nad  $\mathbb{Z}_{13}$ , tym samym  $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$ .

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases}.$$

**Zadanie 5.** Rozważmy grę, rozgrywaną się na prostokątnej planszy  $n \times 1$ . Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dotknąć konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i na sąsiednich. Celem gry jest zgaszenie wszystkich pól.

Dla jakich wartości  $n$  wygrana jest zawsze możliwa?

Podaj prosty algorytm, który rozwiązuje grę, jeśli jest to możliwe (istnieje algorytm zachłanny.)

**Zadanie 6.** Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

**Zadanie 7.** Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{array} \right\}.$$

**Zadanie 8.** Pokaż, że jeśli  $\lambda$  jest wartością własną macierzy  $A$  to  $\lambda^k$  jest wartością własną  $A^k$  dla  $k \geq 0$  (i tych samych wektorów własnych).

Pokaż, że jeśli  $A$  jest odwracalna to  $\lambda^{-1}$  jest wartością własną macierzy  $A^{-1}$  (dla tych samych wektorów własnych).

**Zadanie 9.** Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$ ;
- $L'((x, y, z)) = (0, 0, y)$ ;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$ .

*Wskazówka:* Czasami może być prościej wprost, bez przechodzenia przez macierze.

**Zadanie 10.** Pokaż, że jeśli  $\lambda^2$  jest wartością własną macierzy  $M^2$ , to  $M$  ma wartość własną  $\lambda$  lub  $-\lambda$ .

$$(q + v)(q - v) = q^2 - v^2 \quad \text{Wskazówka:}$$

**Zadanie 11.** Niech  $A \sim B$ . Pokaż, że  $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ .