

Lista 9

Zadanie 1. Dla wektora \vec{V} niech $\sum \vec{V}$ oznacza sumę jego współrzędnych.

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla każdego \vec{V} zachodzi

$$\sum(A\vec{V}) = \sum \vec{V} . \quad (*)$$

Pokaż też twierdzenie odwrotne: macierz A , która ma wszystkie elementy nieujemne i która dla każdego \vec{V} spełnia (*), jest macierzą stochastyczną.

Zadanie 2. Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich), jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Niech M_1, \dots, M_k będą macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i M_i$$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Zadanie 3. Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną, potraktujmy ją jako macierz liczb zespolonych. Pokaż analogicznie do dowodu na wykładzie, że jeśli A ma (zespoloną) wartość własną o module 1, to wektor własny tej wartości własnej jest postaci $\alpha \vec{V}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $\vec{V} > 0$ (w szczególności: \vec{V} jest wektorem liczb rzeczywistych): w tym celu rozważ, co sieje się, jeśli na różnych współrzędnych są różne liczby (zespolone) o różnych argumentach). Wywnioskuj z tego, że A ma jedynie rzeczywiste wartości własne o module 1.

Zadanie 4. Dla wektora $\vec{V} = [v_1, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ niech $\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$.

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$

$$\|A\vec{V}\|_1 \leq \|\vec{V}\|_1 .$$

Wywnioskuj z tego, że A nie ma wartości własnej o wartości bezwzględnej większej niż 1.

Zadanie 5 (* nie liczy się do podstawy). Niech A będzie dodatnią macierzą stochastyczną. Pokaż, że wartość własna 1 ma krotność algebraiczną 1 dla A .

Wskazówka: Skorzystaj z reprezentacji macierzy jako podobnej do macierzy Jordana. Gdyby 1 miała krotność algebraiczną większą niż 1, to macierz ta ma klatkę Jordana J_1 dla 1 w wymiaru większego niż 1. Jak wygląda J_1^k ? Skorzystaj z Zadania 4, formalnie jest dla \mathbb{R} , ale to jest też prawdziwe dla \mathbb{C} .

Zadanie 6. Rozważmy graf o wierzchołkach $\{1, 2, 3, 4\}$ i krawędziach skierowanych $1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$. Jak wygląda znormalizowana macierz sąsiedztwa tego grafu? Oblicz ranking dla tej macierzy, tzn. wektor własny dla wartości własnej o sumie współrzędnych 1.

Oblicz PageRank tego grafu dla $m = 0,25$.

Zadanie 7. W dowolnym języku programowania napisz program, który obliczy PageRank metodą iteracyjną. Jak ustalić warunki zakończenia obliczania?

Oblicz w ten sposób PageRank dla macierzy z Zadania 6 zaczynając od:

- jednorodnego rozkładu
- losowego rozkładu
- rozkładu skupionego w jednym wierzchołku.

Przeprowadź eksperyment na jakimś większym grafie.

Zadanie 8. Niech A będzie macierzą stochastyczną dodatnią (rozmiaru $n \times n$) a \mathbb{V}_1 będzie przestrzenią wektorów własnych dla wartości własnej 1. Pokaż, że $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_{=0} = \{\vec{0}\}$ oraz $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_{=0} = \mathbb{R}^n$.

(Dla przypomnienia: $\mathbb{V}_{=0}$ to podprzestrzeń wektorów o sumie współrzędnych równej 0.)

Zadanie 9. Rozpatrzmy klatkę Jordana J dla $|\lambda| < 1$, możesz założyć, że $\lambda \in \mathbb{R}$, choć zapewne dowód dla \mathbb{R} uogólnia się do \mathbb{C} . Pokaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} J^n$ to macierz zerowa. Granicę rozumiemy tutaj punktowo, tj. macierz $J^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} J^n$, jeśli dla każdego i, j granica $\lim_{n \rightarrow \infty} (J^n)_{i,j}$ istnieje oraz $(J^\infty)_{i,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} (J^n)_{i,j}$.

Wskazówka: Przedstaw macierz J jako $J = \lambda \text{Id} + J'$. Rozwiń $(\lambda \text{Id} + J')^n$ ze wzoru dwumianowego, możesz

Zadanie 10. To zadanie pokazuje, że iteracyjna metoda obliczania PageRanku zbiega wykładniczo szybko.

Niech A będzie macierz stochastyczną (niekoniecznie dodatnią!) rozmiaru $n \times n$ a P macierzą stochastyczną $n \times n$ postaci

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} .$$

Dla liczby rzeczywistej $0 \leq m \leq 1$ niech M_m oznacza macierz

$$M_m = (1 - m)A + mP .$$

Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|M_m \vec{V}\|_1 \leq (1 - m) \|\vec{V}\|_1 .$$

Możesz skorzystać (bez dowodu, choć jest on prosty) z faktu, że dla dowolnych wektorów \vec{W}, \vec{U} zachodzi

$$\|\vec{U} + \vec{W}\|_1 \leq \|\vec{U}\|_1 + \|\vec{W}\|_1 .$$

Wskazówka: Pokaż najpierw dla $m = 0$ oraz $m = 1$, dla $m = 0$ skorzystaj z Zadania 4 z poprzedniej listy.

Zadanie 11. Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że A nie ma wartości własnej -1 .

Wskazówka: Rozpatrz A^2 . Jaka jest krotność geometryczna wartości własnej 1 ? Możesz skorzystać z Twier-

dzien udowodnionych na wykładzie.