

Lista 10

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnej macierzy kwadratowej M (odpowiedniego rozmiaru) zachodzi

$$\vec{U} \cdot (M\vec{V}) = (M^T\vec{U}) \cdot \vec{V},$$

gdzie \cdot oznacza standardowy iloczyn skalarny.

Zadanie 2. Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$). Pokaż, że

$$\vec{U} \cdot (M\vec{V}) = (M\vec{U}) \cdot \vec{V} \quad (**)$$

(zakładamy, że wymiary się zgadzają). Pokaż też własność odwrotną: jeśli M spełnia własność $(**)$ dla każdych \vec{U}, \vec{V} , to M jest symetryczna.

Wynioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych \vec{V} oraz \vec{U} , to $\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$, tj. \vec{V} i \vec{U} są prostopadłe.

Wskazówka: Dla własności odwrotnej: jak wygłębają obie strony równości dla wektorów

wektorów

Zadanie 3. Udowodnij nierówność (inaczej, niż na wykładzie)

$$|\vec{U} \cdot \vec{V}| \leq \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|$$

dla $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$. Pokaż też, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy \vec{U}, \vec{V} są liniowo zależne.

Wskazówka: Można podobnie, jak w dowodzie, że $\cos \alpha = \frac{\|\Delta\| \cdot \|\rho\|}{\|\Delta\| \cdot \|\rho\|}$ albo wprost używając tej własności.

Zadanie 4. Udowodnij, że w przestrzeni \mathbb{R}^n ze standardowym iloczynem skalarnym dla dowolnej pary wektorów \vec{U}, \vec{V} zachodzi

$$\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| \iff (\vec{U} - \vec{V}) \perp (\vec{U} + \vec{V}).$$

Zinterpretuj ten fakt jako stwierdzenie: „przekątne równoległoboku są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy równoległobok ten jest rombem”.

Wskazówka: Wyraź $\vec{U} - \vec{V}$ przez $\vec{U} + \vec{V}$ i $\vec{U} - \vec{V}$.

Zadanie 5. Dla podanych poniżej układów wektorów podaj bazy dopełnień ortogonalnych przestrzeni liniowych przez nie generowanych:

- $[1, 0, 1]^T, [2, 3, 1]^T$ nad \mathbb{R} ;
- $[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1]$ nad \mathbb{Z}_2 ;
- $[1, 0, 2]$ nad \mathbb{Z}_3 .

Uwaga: w przestrzeniach \mathbb{Z}_p^n dopełnienie ortogonalne \mathbb{W}^\perp może nie być rozłączne z \mathbb{W} , może nawet zachodzić równość $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{F}^n$, rozpatrzmy standardowy iloczyn skalarny (na \mathbb{F}^n). Pokaż, że:

- $\mathbb{V}_1 \leq \mathbb{V}_2 \iff \mathbb{V}_1^\perp \geq \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp \cap \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp + \mathbb{V}_2^\perp$.

Zadanie 7. Niech $U \subseteq \mathbb{F}^n$ będzie układem wektorów, rozpatrzmy standardowy iloczyn skalarny (na \mathbb{F}^n). Pokaż, że $(U^\perp)^\perp = \text{LIN}(U)$.

Zadanie 8 (* nie liczy się do podstawy, choć nietrudne). Pokaż, że dla każdego kodu liniowego istnieje kod mu równoważny, który ma kodowanie systematyczne, tj. ma macierz generatorów postaci:

$$\begin{bmatrix} \text{Id} \\ M' \end{bmatrix}$$

Wskazówka: Eliminacja Gaussa na kolumnach.

Zadanie 9. Rozpatrzmy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia najwyżej 3. Zdefiniujemy iloczyn skalarny jako

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx .$$

Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^i, x^j \rangle$ dla $0 \leq i \leq j \leq 3$.

Zadanie 10 (Macierz Grama). Zdefiniujemy macierz Grama układu wektorów $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ w przestrzeni Euklidesowej \mathbb{V} wymiaru k jako

$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} .$$

Niech $B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ będzie bazą ortonormalną \mathbb{V} . Zdefiniujemy macierz $A = [(\vec{v}_1)_B | (\vec{v}_2)_B | \dots | (\vec{v}_k)_B]$, tj. macierz, której j -ta kolumna to wektor z \mathbb{R}^n będący wyrażeniem \vec{v}_j w bazie B . Pokaż, że

$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = A^T A .$$

Korzystając z tej reprezentacji udowodnij, że

- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ jest liniowo zależny.

Komentarz: Założenie, że wymiar przestrzeni i liczba wektorów w układzie są takie same nie jest potrzebne, ale ułatwia rachunki.

Zadanie 11 (Nierówność Bessela; równość Parsevala). Niech $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ będą układem ortonormalnym (nie zakładamy, że jest bazą). Pokaż, że dla dowolnego wektora \vec{v} :

$$\sum_{i=1}^k |\langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 .$$

Co więcej, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego \vec{v} zachodzi równość.