

# Lista 11

**Zadanie 1.** Niech  $\mathbb{V}$  będzie przestrzenią liniową nad  $\mathbb{R}$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech  $B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  będzie bazą ortonormalną  $\mathbb{V}$  a  $P : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową  $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ .

Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z  $B$  na  $\mathbb{W}$  wynosi 1, tj.:

$$\sum_{i=1}^n \|P\vec{b}_i\|^2 = 1 .$$

*Wskazówka: Wyraź rzut przez bazę ortonormalną  $\mathbb{W}$ .*

**Zadanie 2.** Pokaż, że „rzut prostopadły nie zwiększa długości”: niech  $P$  będzie rzutem prostopadłym na  $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ . Wtedy dla każdego  $\vec{v} \in \mathbb{V}$  zachodzi

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|^2 &= \|P\vec{v}\|^2 + \|\vec{v} - P\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{v}\| &\geq \|P\vec{v}\| \end{aligned}$$

i równość w drugim przypadku zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \in \mathbb{W}$ .

**Zadanie 3.** Pokaż, że symetria względem przestrzeni  $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^n$  wyraża się wzorem

$$2P_{\mathbb{W}} - \text{Id} ,$$

gdzie  $P_{\mathbb{W}}$  to rzut prostopadły na  $\mathbb{W}$ , zaś  $\text{Id}$  to przekształcenie identycznościowe.

Symetrię definiujemy jako jedyne przekształcenie liniowe, takie że

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{W}}\vec{V} &= \vec{V} && \text{dla } \vec{V} \in \mathbb{W} \\ S_{\mathbb{W}}\vec{V} &= -\vec{V} && \text{dla } \vec{V} \in \mathbb{W}^{\perp} \end{aligned}$$

**Zadanie 4.** Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany  $x^3$  oraz  $x^3 - x^2 + x - 1$ .

*Wskazówka: Do drugiej części: to jest rzut, rzut więc jest przekształceniem liniowym.*

**Zadanie 5.** Zortonormalizuj a następnie uzupełnij do bazy ortonormalnej podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ .

**Zadanie 6.** Niech  $\mathbb{V}$  będzie przestrzenią Euklidesową, zaś  $A$  jej bazą. Pokaż, że jeśli baza  $B$  powstaje z bazy  $A$  przez ortonormalizację Grama-Schmidta, to  $M_{BA}$  i  $M_{AB}$  są macierzami górnotrójkątnymi oraz mają dodatnie elementy na przekątnej.

**Zadanie 7.** Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt  $\alpha$  na płaszczyźnie;
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną;
- w  $\mathbb{R}^2$  symetria względem prostej;
- w  $\mathbb{R}^3$  symetria względem płaszczyzny.

**Zadanie 8.** Udowodnij, że złożenie izometrii jest izometrią.

**Zadanie 9.** Udowodnij, że jeśli  $M$  jest macierzą ortogonalną, to  $\det(M) \in \{-1, 1\}$ . Wywnioskuj z tego, że jeśli  $F$  jest izometrią, to  $\det F \in \{-1, 1\}$ .

**Zadanie 10.** Pokaż, że macierze ortogonalne są zamknięte na mnożenie, transpozycję i branie macierzy odwrotnej. Tj. jeśli  $A, B$  są ortogonalne (i tego samego rozmiaru), to również  $AB, A^T, A^{-1}$  są ortogonalne.

**Zadanie 11** (Nierówność Hadamarda; \* nie liczy się do podstawy). Niech  $M = [\vec{C}_1 | \dots | \vec{C}_n]$  będzie macierzą kwadratową o kolumnach  $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n$ . Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \|\vec{C}_i\|$$

(gdzie  $\|\cdot\|$  to długość w standardowym iloczynie skalarnym) i że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n$  są układem ortogonalnym.

*Wskazówka:* Rozważ najpierw przypadek, gdy  $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n$  są układem ortogonalnym. W ogólności przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje z wyrażeniami po dwóch stronach nierówności? W dowodzie możesz korzystać z innych zadań z tej listy, nawet jeśli nie umiesz ich pokazać.