

Lista 12

Zadanie 1 (Algorytm Cholesky'ego; Rozkład Cholesky'ego). Wiemy, że macierz dodatnio określoną $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ można przedstawić jako iloczyn $A^T A$, gdzie $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą górnotrójkątną.

Podaj algorytm obliczania A korzystający z tego rozkładu przy dodatkowym założeniu, że $a_{ii} > 0$ dla każdego i . Jaki jest jego czas działania? Pokaż też (korzystając z algorytmu), że tak zdefiniowane A jest jedyne.

Wskazówka: Obliczaj A kolejnymi kolumnami, od lewej do prawej i z góry na dół.

Zadanie 2. Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $A^T A$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz A możesz wziąć macierz MEB , gdzie E to baza standardowa, zaś B : baza ortonormalna. Można też użyć bezpośrednio Algorytmu Cholesky'ego lub po prostu policzyć ręcznie korzystając z tego, że A można wziąć górnotrójkątną.

Zadanie 3. Pokaż, że

- suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
- macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.

Zadanie 4. Niech $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą dodatnio określoną. Udowodnij, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n m_{ii}.$$

Wskazówka: Przedstaw M jako $M = A^T A$ i skorzystaj z nierówności Hadamarda (dla A).

Zadanie 5 (Nie liczy się do podstawy *). Pokaż, że symetryczna macierz $n \times n$ liczb rzeczywistych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.

Zadanie 6. Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

\cdot	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

\cdot	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

\cdot	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	b	a	c

\cdot	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	b	a	c

\cdot	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

Wskazówka: W ostatnim przypadku nie jest to grupa — sprawdź łączność.

Zadanie 7. Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

Zadanie 8. Rozważamy trzy grupy:

1. grupą symetrii trójkąta równobocznego (trzy obroty i trzy symetrie osiowe);
2. grupą obrotów sześciokąta foremnego;
3. grupą $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem mod 6).

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?

Zadanie 9. Pokaż, że dla x_1, \dots, x_k : elementów grupy G oraz liczb całkowitych z_1, \dots, z_k zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \dots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \dots (x_1)^{-z_1}.$$

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie izomorfizmy pomiędzy grupą obrotów kwadratu, a grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Wskazówka: Pokaż, że izomorfizm zachowuje rząd elementu.

Zadanie 11. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?