

Lista 13

Zadanie 1. Które z poniższych zbiorów z działaniem są grupami?

1. zbiór liczb naturalnych, z dodawaniem;
2. zbiór liczb całkowitych, z mnożeniem;
3. zbiór liczb postaci $\frac{1}{k}$, gdzie $k \geq 0$ jest całkowite, z mnożeniem;
4. zbiór liczb wymiernych, z dodawaniem;
5. zbiór liczb wymiernych bez zera, z mnożeniem.

Zadanie 2. Rozważmy grupę G i zdefiniujmy w niej *sprzężenie* (względem elementu g) $\varphi_g : G \rightarrow G$:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1} .$$

Pokaż, że

- $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$;
- φ_a jest izomorfizmem z G w G ;
- jeśli $H \leq G$ to $\varphi_a(H) \leq G$ (podgrupa sprzężona).

Zadanie 3. Pokaż, że równość

$$(ab)^r = a^r b^r$$

zachodzi dla dowolnego r (naturalnego) oraz dowolnych $a, b \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest przemienna.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.

Zadanie 5. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G .

- Pokaż, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G .
- Pokaż, że jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G , to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$.
- Pokaż, że jeśli G jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1 h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$.
(Dla przypomnienia: $\langle A \rangle$ to najmniejsza grupa generowana przez A .)

Zadanie 6 (* nie liczy się do podstawy). Pokaż, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Wskazówka: Rozważ najniższą potęgę generatora, która należy do podgrupy. Pokaż, że jest to generator.

Zadanie 7. Centralizatorem elementu a w grupie G nazywamy zbiór elementów przemiennych z a , czyli

$$G(a) = \{b \in G : ab = ba\} .$$

Centrum grupy G nazywamy zbiór

$$Z(G) = \{a : \forall b \in G : ab = ba\}$$

(czyli: przemiennych ze wszystkimi elementami w G). Udowodnij, że dla dowolnej grupy G i elementu a centralizator $G(a)$ oraz centrum $Z(G)$ są podgrupami G . Pokaż też, że

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} G(g) .$$

Zadanie 8. Pokaż, że zbiór symetrii trójkąta równobocznego jest izomorficzny z grupą wszystkich permutacji zbioru trzelementowego S_3 .

Zadanie 9. Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1); (1, 2, 3, \dots, n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \dots, n-1$;
- $\langle (1, 2); (2, 3, \dots, n) \rangle = S_n$.

Wskazówka: Dla pewnych zbiorów wiemy, że są one generatorami.

Zadanie 10. Dane są permutacje:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 10 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$
$$\tau = (1, 5, 6)(2, 4, 10, 3, 7)(8, 9) .$$

Oblicz permutację

$$\rho = \tau^{-61} \sigma^{62} .$$

Podaj ρ^{-1} , rozkład ρ na cykle rozłączne, rząd ρ .

Zadanie 11 (Inwolucja). Inwolucją nazywamy dowolną funkcję $f : A \mapsto A$ taką, że $f \circ f$ jest identycznością. Zauważ, że inwolucje zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ są permutacjami z S_n .

- Jak wygląda rozkład inwolucji na cykle?
- Przedstaw permutację cykliczną (a_1, a_2, \dots, a_k) jako złożenie dwóch inwolucji.
- Udowodnij, że każda permutacja z S_n jest złożeniem dwóch inwolucji.